II курс, III семестр — Крюков Леонид Владимирович

Матан

Глава I Теория числовых рядов

§1 Понятие числового ряда и его сходимости

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – посл. действ. чисел.

формальная сумма

слагаемые числа: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ – числовой ряд} \quad (1)$$

$\{u_n\}$ ← члены ряда

$\forall$ каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим сумму первых n слагаемых

$S_n = u_1 + \dots + u_n \ (\forall n)$ – n-ая частичная сумма

Опр1 ряд (1) сходится (к числу (своей сумме) S') если посл-ть S_n имеет предел ($\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$) и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S'$

(1) $S' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

Опр2 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |S_n - S| < \varepsilon$ ⇔ $|r_n| < \varepsilon$

⇕

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

остаток ряда → $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k = r_n$

Пример 1 $\forall q \neq 0: u_n = q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \to ?$ $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}$

(может начинаться с любого числа)

$|q| = 1$: ряд расходится

$|q| > 1$: $q^n - 1$ не имеет предела, ряд расходится

$|q| < 1$: $q^n - 1 \to -1$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$ — ряд сходится

Пример 2 $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$; $\left(= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$S_n = u_1 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ — ряд сходится.

Пример 3: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ф-ла Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\frac{x^n}{n!} e^{\theta x}\right)$$

Лагранж

$\theta = \theta(x, n)$, $\theta \in (0,1)$

$S_n = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$

оценивание

Докажем: $S_n \to \underbrace{e^x - 1}_{S'}$

$$|S_n - S| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} e^{\theta x} =$$

может быть отрицательным

$$= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} = (*)$$

Если $x > 0$, то $\theta x < x \Rightarrow e^{\theta x} < e^x$

Если $x \leq 0$, то $e^{\theta x} \leq 1 \leq e^{-x}$

$\Rightarrow e^{\theta x} < e^{|x|}$

$(*) \leq \left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right) e^{|x|}$ const

б.м.в.

снизу ≥ 0, сверху огр. б.м. $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} |S_n - S| = 0$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 \quad \Big| \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ $\left(0! \overset{\text{def}}{=} 1\right)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Эйлер)

Теорема (Критерий Коши)

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (ряд сходится)

Пос-ть S_n имеет предел (крит. Коши)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N}$

$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ (=) $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится

В силу т. 1 из сходимости ряда $\Rightarrow (p=1)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N : |u_{n+1}| < \varepsilon$ ↓ б.м.п.

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Следствие 1 Это необходимое условие сходимости. Если ряд сход., то его члены $\to 0$. Обратное неверно, это не дост. условие.

Пример 4 (1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ – расходится. Гармонический ряд

По критерию Коши (1) расходится $\Leftrightarrow$

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N, \exists p \in \mathbb{N}$

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \geq \varepsilon$ $\quad n=N$ возьмём $p=N$:

Нер-во: $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \geq (\forall m \in \mathbb{N})$

$\geq \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$

$\sum_{k=N+1}^{N+N} u_k = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2} \ \forall N \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2} = \varepsilon$, чтд.

Замечание 1. Отбрасывание любого конечного числа членов ряда не влияет на сходимость (на сумму влияет)

$u_1 \ u_2 \ \dots \ \exists N$, что все выбрасывание происходят до него.

$S_n \ \forall n \geq N$ изменяется на постоянную сумму (const)

Зам 2 ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (c u_k)$, $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ сходятся и расходятся одновременно (по крит. Коши константа выносится)

§ 2 Ряды с неотрицательными членами

$p_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ – рассмотрим.

$S_n = p_1 + \dots + p_n \leq S_{n+1} = p_1 + \dots + p_n + p_{n+1} = S_n + p_{n+1} \geq 0$

$\{S_n\}$ является неубывающей посл-тью

Монотонная посл-ть сходится $\Leftrightarrow$ она ограничена

Теорема 2 (Критерий сходимости) ряд с неотр. чл. сход. $\Leftrightarrow$ посл-ть его част. сумм. огр. ($\{S_n\}$ огр.)

§2. Признаки сравнения (вместе сходимость)

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ (1) $\quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ (2) (неотр. ряды)

Теорема 3 (1-ый признак сравнения)
Пусть $(p_k \le p_k')$ $\forall k$.

① Если сход. (2) $\Rightarrow$ (1) сход.
② Если расх. (1) $\Rightarrow$ (2) расх. } следствие

Д-во: $S_n \le S_n'$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

~~если ряд (2) огр $\Rightarrow$ (2) сход $\Rightarrow$ ряд (1) огр $\Rightarrow$ (1) сход~~

~~Если ряд (1) неогр $\Rightarrow$ ряд (2) неогр $\Rightarrow$ (2) расх~~

① Если $\sum p_k'$ сх., то (т.2) S_n' огр $\Rightarrow S_n$ огр. $\Rightarrow$ (т.2) $\sum p_k$ сх.

② Если $\sum p_k$ расх, то (т.2) S_n неогр (б.д.н) $\Rightarrow S_n'$ неогр $\Rightarrow$ (т.2) $\sum p_k'$ расх.

Зам. 1) Можно считать что $p_k \le p_k'$ $\forall k \ge k_0$ (отбрасывание конечного числа (первых k_0-1) не влияет на сходимость)

2) Нер-во $p_k \le p_k'$ можно заменить на $p_k \le c p_k'$ $(c>0)$ (в силу зам. 2 §1)

Пример 1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится (с неотр. сл.)

$\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)}$, $k \ne 1$, а $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ — сходится, что

Пример 2: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, если $\alpha \ge 2$, то

сом нер-во $\frac{1}{k^\alpha} \le \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)}$ ... $\forall k$ $\Rightarrow$ сход.

Если $\alpha \ne 1$, то это грам. ряд. (расх.)

$0 < \alpha \le 1$, то $\frac{1}{k^\alpha} \ge \frac{1}{k}$ $\forall k$ расх.

$\alpha \le 0$ общие члены $\not\to 0 \Rightarrow$ расх.

$1 < \alpha < 2$ — потом..

Теорема 4 (2ой признак сравнения)
Пусть $\exists \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = L \ne 0$ (>0) начиная с нек. номера $k_1 > 0$. Тогда ряды

$\sum p_k$ и $\sum p_k'$ сходятся и расходятся одновременно

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall k \ge N$: $\left| \frac{p_k}{p_k'} - L \right| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{L}{2} \Rightarrow \exists N_0 = N(\varepsilon)$ $\forall k \ge N_0$: $-\frac{L}{2} < \frac{p_k}{p_k'} - L < \frac{L}{2} \Leftrightarrow \frac{L}{2} < \frac{p_k}{p_k'} < \frac{3L}{2}$

$\forall k \ge k_0$ $\frac{L}{2} p_k' \overset{(1)}{<} p_k \overset{(2)}{<} \frac{3L}{2} p_k'$ с какого-то k (N_0)

если p_k — сход $\Rightarrow p_k'$ сход. (1)
если p_k — расх $\Rightarrow p_k'$ расх. (2) $\forall k \ge N_0$.
если p_k' расх $\Rightarrow p_k$ расх (1)
если p_k' — сход $\Rightarrow p_k$ сход (2)

Теорема 5 (3-ий признак сравнения)

Пусть $p_k' > 0$, $p_k > 0$ $\forall k \geq k_1$

$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'}$ $\forall k \geq k_1$, тогда выполнены оба усл. т. 3. $\frac{p_k}{p_k'}$ расх $\Rightarrow p_k'$ расх; p_k' сход $\Rightarrow p_k$ сход

Док-во

$$\frac{p_{k_1+1}}{p_{k_1}} \leq \frac{p_{k_1+1}'}{p_{k_1}'}, \quad k = k_1$$

$$\frac{p_{k_1+2}}{p_{k_1+1}} \leq \frac{p_{k_1+2}'}{p_{k_1+1}'} \quad \cdots \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{p_{n+1}'}{p_n'}$$

Перемножим их почленно

$$\frac{p_{n+1}}{p_{k_1}} \leq \frac{p_{n+1}'}{p_{k_1}'} \quad \forall n \geq k_1$$

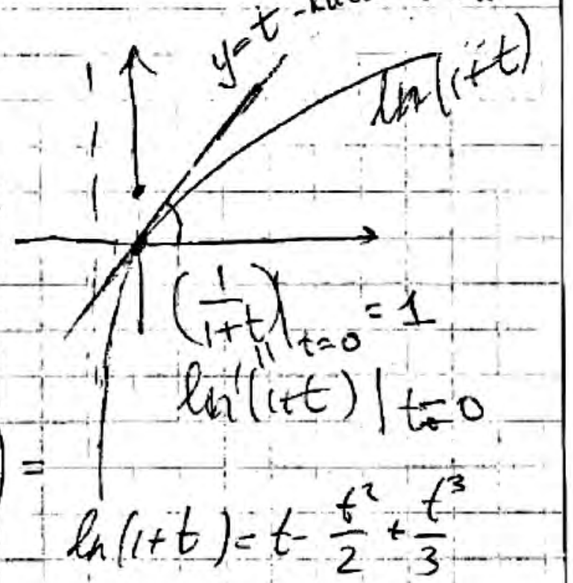
$p_{n+1} \leq \left(\frac{p_{k_1}}{p_{k_1}'}\right) p_{n+1}'$ усл. т. 3. $= C = \text{const}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad p_k \geq 0$$

Пример: гарм. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится

$H_n \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$ (не огр. $\Rightarrow$ д. б. н.)

1) $\ln(1+t) < t \quad \forall t > 0$



2) $\forall k \in \mathbb{N}: \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k}$

$0 < \frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}) \overset{\text{Маклорен}}{=}$

$= \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \overline{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2k^2} + \overline{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ при $k \to \infty$

$\left[\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})\right] \Big/ \frac{1}{k^2} \to \frac{1}{2}$

$\sum \frac{1}{k^2}$ сходится $\Rightarrow$

3) ряд с положит. членами

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})\right)$ сходится

(5)

Пусть его сумма равна C_0

4) $H_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})\right)}_{\to C_0} + \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = C_0 + \underset{\text{б.м.}}{\gamma_n} + \ln(n+1) =$

$= \{\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \dots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1)\}$

$= C_0 + \gamma_n + \ln n + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 0,\ \text{б.м.}} = \ln n + C_0 + \overline{\overline{o}}(1)$, $n\to+\infty$

$C_0 \approx 0{,}477$ константа Эйлера (неизвестно, рац. ли это число)

2° Признаки Коши и Даламбера

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k (*) \sim \sum q^k$ — беск. геом. прогр., $p_k \geq 0\ \forall k\in\mathbb{N}$

Теорема 6 (признак Коши)

I. Если $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1\ \forall k \geq k_0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ сходится

Если $\sqrt[k]{p_k} \geq 1\ \forall k \geq k_0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится

II. Пусть $q \equiv \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{p_k}$. Тогда при $q<1$ $(*)$ сход., $q>1$ — ряд $(*)$ расх.

При $q=1$ может и сход. и расх.

Д-во I. $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \Rightarrow p_k \leq q^k\ \forall k \geq k_0$,

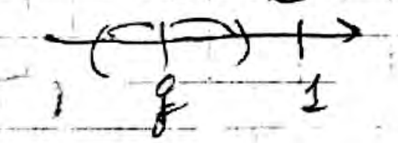
$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, $q<1$ — сходится $\Rightarrow$ по ~~ТЗ при~~ I признаку сравнения ряд $(*)$ сходится.

$\sqrt[k]{p_k} \geq 1 \Rightarrow p_k \geq 1\ \forall k \geq k_0 \Rightarrow$ не выполнено необх. условие $\Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится

II. $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{p_k} < 1\ (=q)\ \forall \varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\geq k_0$:

$|\sqrt[k]{p_k} - q| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1-q}{2}$



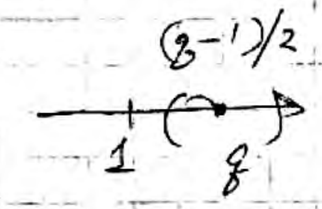
Тогда $\forall k \geq k_0$:

$\sqrt[k]{p_k} < 1-\varepsilon = 1 - \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} < 1$

$\sqrt[k]{p_k} < q+\varepsilon = q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} < 1$

$\Rightarrow$ I $\Rightarrow$ ряд $(*)$ сходится

$\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{p_k} \equiv q > 1$



$\forall k \geq k_0\ \sqrt[k]{p_k} \overset{(=?)}{>} \frac{1+q}{2} > 1$

$q - \frac{q-1}{2} = \frac{q+1}{2}$

$\Rightarrow$ I $\Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится

Пример 1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расх $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится

$\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = 1\ (q=1)$

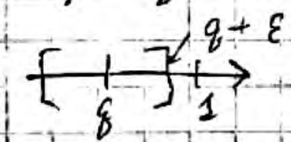
Замечание 1 Ув II т. 6 остается справедливым, если

$q = \overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{p_k}$ (у огр. посл-ти верхний предел $\exists$)

(макс. пред. т.)

Если $q<1$, то все эл-ты посл. $\sqrt[k]{p_k}$, кроме, быть может, конечного числа, расположены левее числа $q+\varepsilon$ $(\forall \varepsilon>0)$ (иначе $\exists$ др. верхн. предел)

При $q<1\ \exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\geq k_0$: $\sqrt[k]{p_k} \leq q+\varepsilon < 1$



$\Rightarrow$ I $\Rightarrow$ $(*)$ сходится

Если $q>1$, то $\exists$ подпосл $\sqrt[n_k]{p_{n_k}} \to q$ ~~$\frac{1}{\left[\frac{1}{q}\right]}$~~

Начиная с нек. номера $\sqrt[n_k]{p_{n_k}} > q-\varepsilon$ $(\forall \varepsilon>0)$

$\Rightarrow p_{n_k} > 1 \Rightarrow$ не вып. необх. усл. $\Rightarrow$ (*) расх.

Теорема 7 (признак Даламбера)

Пусть $p_k>0$ начиная с нек. номера

(I) Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q < 1$ $\forall k \ge k_0$, то (*) сходится

Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge 1$ $\forall k \ge k_0$ то (*) расходится

(II) Пусть $q = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k}$. Если $q<1 \Rightarrow$ (*) сходится

Если $q>1 \Rightarrow$ (*) расходится

$q=1$ ничего сказать нельзя.

Д-во (I) $\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q<1$ $\forall k \ge k_0$, $\frac{q^{k+1}}{q^k} = q \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Т-5 III признак сравн, т.к. q^{k+1}/q^k

сходится $\Rightarrow$ (*) сход.

$\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge 1 \Rightarrow p_{k+1} \ge p_k \Rightarrow$ посл. p_k - неубывающая

$\forall k \ge k_0$ и не выполнено необх. усл. сход.
(т.к. $p_k>0$ то Σ будет возрастать)

(II) аналогично д-ву п. II т-6

Замечания а) в случае $q=1$ п. II
$\exists$ примеры рядов кот. сход. и расходятся
ряды, рассмотренные в примере 1 подходят

б) утв. п. II теор. 7 остаётся справедливым, если $q = \varlimsup\limits_{k\to+\infty} p_{k+1}/p_k$ (аналогичное д-во)

3° Сравнение признаков Коши и Даламбера

Пример: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (3+(-1)^k)/2^{k+1}$] p_k, положит. посл.

П-к Даламбера: $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(3+(-1)^{k+1})2^{k+1}}{(3+(-1)^k)2^{k+2}} = \frac{(3+(-1)^{k+1})}{2(3+(-1)^k)}$

$= \left\{ \frac{4}{2\cdot 2} = 1 \ (k \not\vdots\, 2), \ \frac{2}{2\cdot 4} = \frac{1}{4} \ (k \,\vdots\, 2) \right\}$, $\varlimsup\limits_{k\to+\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = 1 = q$ (не подходит (блокирует применение I))

П-к Коши $\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\frac{3+(-1)^k}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2}\sqrt[k]{\frac{3+(-1)^k}{2}} =$

$\xrightarrow{k \,\vdots\, 2} \frac{1}{2}\sqrt[k]{2} \to \frac{1}{2}$

$\xrightarrow{k \not\vdots\, 2} \frac{1}{2}$

$\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ряд сходится

Гипотеза: признак Коши "сильнее" признака Даламбера

1) $\exists$ ряды с неотр. чл., для кот. Коши даёт ответ, а Даламбер - нет $(q=1)$

2) всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ по сходимости ряда с неотр. чл., Коши даёт такой же ответ.

Лемма Если $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L \ (\in [0,+\infty])$,
то $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$

Д-во: $\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\frac{p_k}{p_{k-1}} \cdot \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1}$ $p_i > 0$

$a_k \quad a_{k-1} \quad a_2 \quad a_1$

(ср. геом. $a_1 \ldots a_k$)

По условию $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = L \overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k} \overset{?}{=} L$

Пусть $L \in (0, +\infty)$ $(\neq 0, \neq +\infty)$

По условию $\lim\limits_{k\to+\infty} \underbrace{\ln a_k}_{b_k} = \ln L \overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\underbrace{(\ln(a_1) + \ldots + \ln(a_k))}_{b_k} \overset{?}{=} \ln(L)$ (теор. ф-ции)

b_1

? $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = b \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{b_1 + \ldots + b_k}{k} = b$

$$\left|\frac{b_1+\ldots+b_k}{k} - \underbrace{b}_{\frac{k}{k}\left\{\frac{b+\ldots+b}{k}\right\}}\right| = \left|\frac{(b_1-b)+(b_2-b)+\ldots+(b_k-b)}{k}\right| =$$

$\{\forall N \le k\} =$

$$\left|\frac{(b_1-b)+\ldots+(b_{N-1}-b)}{k} + \frac{(b_N-b)+\ldots+(b_k-b)}{k}\right| \le$$

{Т.к. $b_k \to b \Rightarrow b_k - b \to 0 \Rightarrow \exists M \; |b_k - b| \le M \quad \forall k$ (огранич.)}

$$\le \frac{|b_1-b|+\ldots+|b_{N-1}-b|}{k} + \frac{|b_N-b|+\ldots+|b_k-b|}{k} \le$$

$$\le \frac{(N-1)M}{k} + \underbrace{\frac{(k-N+1)}{k}}_{<1}\varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

{$b_k \to b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall k \ge N : |b_k - b| < \varepsilon$}

$\Rightarrow$ все числ. $< \varepsilon$

{$\exists N_1 \ge N: \forall k \ge N_1 \quad \frac{N-1}{k} M < \varepsilon$, M, ε - фикс}

Если $L \in (0, +\infty) \Rightarrow$ лемма Д-на

Случай $L = 0$, $L = +\infty$ Д-ть самостоятельно

Ломов Игорь Сергеевич

(10) Интегральные признаки Коши-Маклорена

Теорема 8 (признак Коши-Мак.)

Пусть $f(x) \ge 0$ и не возрастает на полуинтервале $x \ge 1$. Тогда для того, чтобы сходился числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ (*)

необходимо и достаточно, чтобы сходилась след. посл-ть $\{a_n\}$

$$a_n = \int_1^n f(x)\,dx \quad \left(\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ - сходится}\right)$$

Доказательство. Фиксируем $k \ge 2$ и рассмотрим $f(x)$ на $x \in [k-1, k]$

Т.к. $f(x)$ не $\uparrow \Rightarrow$

$\Rightarrow f(k) \le f(k-1)$

и $f(k) \le f(x) \le f(k-1)$

$\forall x \in [k-1, k]$

$\Rightarrow f(x)$ ограничена на $[k-1, k]$

и монотонна $\Rightarrow$ она интегрируема на $[k-1, k]$ (обоснование)

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \qquad \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx = f(k-1)\int_{k-1}^{k} dx = f(k-1)$$

(8)

$$\Rightarrow \underbrace{f(k)}_{\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx} \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le \underbrace{f(k-1)}_{\int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx} \quad \forall k = 2, 3, \ldots, n$$

(обоснование)

$$f(2) \le \int_1^2 f(x)\,dx \le f(1)$$
$$f(3) \le \int_2^3 f(x)\,dx \le f(2)$$
$$\vdots$$
$$f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \le f(n-1)$$
$(+)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$;

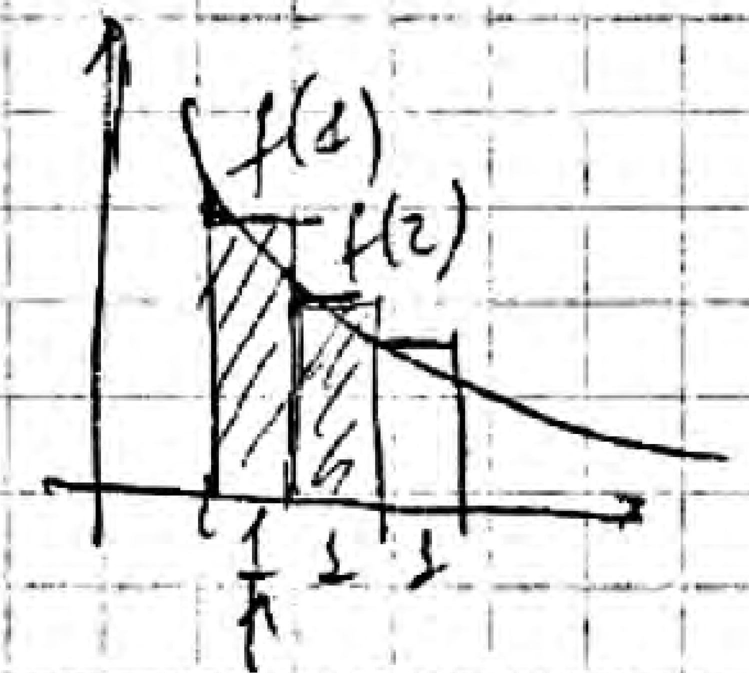
$$S_n - f(1) \le \int_1^n f(x)\,dx \le S_{n-1} \Rightarrow$$

$$S_n - f(1) \le a_n \le S_{n-1}$$

$f(x) \ge 0 \Rightarrow \{a_n\}$ не убывает. Для её сходимости $\Leftrightarrow$ её ограниченность

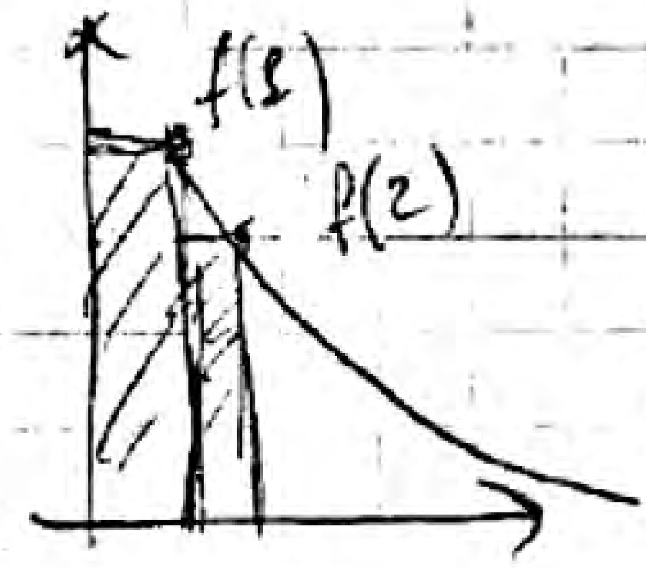
$f(k) \ge 0 \Rightarrow$ для сх-ти ряда $(*) \Leftrightarrow \{S_n\}$ ограничена (т.2)

Из полученных нер-в $\Rightarrow$ для ограниченности $\{S_n\} \Leftrightarrow \{a_n\}$ - ограничена (т.е. сходилась), что



S_n - площадь ////-части.

и она же площадь



$S_n - f(1)$

$\Rightarrow S_n - f(1) \le \{a_n\} \le S_{n-1}$

Замечание: Можно рассматривать $f(x)$ на $x \ge m$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \sim a_n = \int_m^n f(x)\,dx$$

Пример: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

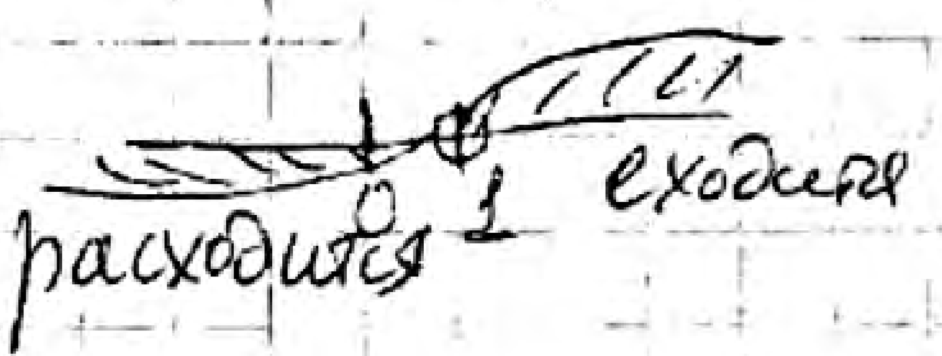
1) $\alpha \le 0 \Rightarrow$ расходится

2) $\alpha > 0$ $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} > 0$, $\downarrow$ на $(1, +\infty)$ $(k \ge 1)$

$\Rightarrow$ ряд сходится $\Leftrightarrow$ $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx =$

$$\begin{cases} = \left\{ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^n = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, \alpha \ne 1 \right\} \\ = \{ \ln n, \alpha = 1 \} \end{cases}$$

$1-\alpha > 0 \Rightarrow$ ряд расходится $(\alpha < 1)$
$\alpha = 1 \Rightarrow$ ряд расходится $(\alpha = 1)$
$1-\alpha < 0 \Rightarrow$ ряд сходится $(\alpha > 1)$



$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k}$ $\qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x} = \int_2^{+\infty} \frac{d\ln x}{\ln^{\alpha} x} =$

$= \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{\ln 2}^{\ln t}$ $\quad \alpha \le 1$ расх.
$\alpha > 1$ сход

§3 Перестановка слагаемых в сходящихся числовых рядах

Рассм. $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, $u_k \in \mathbb{R}$ (1)

$a+b = b+a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Если в (1) переставить конечное число слагаемых то ничего не изменится, а если бесконечное?

Опр. Ряд (1) – абс сход., если сход. ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k|$ (2)

Утв: (1) – сход. абс $\Rightarrow$ (1) сход.
(2) – сход. $\Rightarrow$ (1) сход.) обратное неверно

Д-во: Ц сх-ти (2): $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N$
$\forall p \in \mathbb{N}$:

$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$ (Критерий Коши)

$\Rightarrow$ (1) сходится, ч.т.д.

Обратное неверно: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ (3)

$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ – гарм. ряд, расх.

Докажем, что ряд (3) сход.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} \frac{(-1)^{n+1}}{} + R_{n+1}(x)$

$\forall x \in [0, 1]$

$|R_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [0, 1]$ (было д-но)

Положим $x = 1$:

$\ln(2) = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(x)$

$\Rightarrow S_n \to \ln 2 \Rightarrow$ (3) сход.

Опр Ряд (1) наз. усл. сход., если (1) сход, а ряд (2) расх. ($\Rightarrow$ (3) усл. сходится)

$\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ – абс. сходящийся

$\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k^{1+\varepsilon}} \quad \forall \varepsilon > 0$ – абс. сход.

Рассм (3) Переставим слагаемые в (3) после 1 "+" сл. ставим 2 "–"

$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}}_{} + \dots$ (**)

$S_{3n} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n}\right)$

сумма конечная, можно переставлять слагаемые

$= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4n}\right) =$

$\textcircled{=}$ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\right)-$
$-\frac{1}{2}\left(1+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=H_{2n}-\frac{1}{2}H_n-\frac{1}{2}H_{2n}=$
$=\frac{1}{2}H_{2n}-\frac{1}{2}H_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}\ln 2n-\frac{1}{2}\ln n=\frac{1}{2}\ln 2$

$\Rightarrow (**)=\frac{1}{2}\ln 2$

{ S_{3n-1} и S_{3n-2} отличаются от S_{3n} на б.м. величины
$\Rightarrow$ тоже $\to 1/2\ln 2$ }

Из (3): $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots \to \frac{3}{2}\ln 2$

Теорема 9 (теор. Римана) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k \quad u_k\in\mathbb{R}$ (1)
Рассм. ряд (1) – сходится усл., тогда каким бы ни было $L\in\mathbb{R}$, то можно переставить слагаемые (1) так, что $(1)'\to L$
($(1)'$ – новый ряд)

Д-во. Пусть (1) сход. усл. Выясним его структуру. Пусть p_k – неотр. слаг. (1), взятые в том же порядке, что и в (1).

Пример: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}-\ldots$
(p_1, q_1, p_2, q_2, p_3)

Обозначим через q_k – модули отр. эл. (1), в том же порядке, что и в (1)

Утв 1 и p_k, и q_k – бесконечно много.
Если их конечно, то отбросим конечное число p_k (или q_k) $\Rightarrow \exists\, n\in\mathbb{N}: \forall k\geq n$ все слагаемые имеют один знак и ряд сходился бы абсолютно

Рассм. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k$ (P); $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} q_k$ (Q)

Утв 2. и (P) и (Q) расходятся.

Обозначим через $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$, $P_n=\sum\limits_{k=1}^{l'}p_k$; $Q_n=\sum\limits_{k=1}^{l''}q_k$
эти p_k и q_k входят в S_n

$\Rightarrow S_n=P_n-Q_n$

Пусть ряд P сход. $\Rightarrow \{P_n\}$ сход. $\Rightarrow Q_n=P_n-S_n$ – сходится (сход.) $\Rightarrow$ ~~ряд~~ P_n+Q_n – сход. $\Rightarrow$ (1) сход. абс ~~аналогично~~ $\Rightarrow$ (1) сход. абс $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ P – расх.
Аналог. Q – расх

$\Rightarrow P_n, Q_n$ – б.б.п. ~~неограниченные~~ положит. посл.
$\Rightarrow$ как для ряда P, так и для ряда Q справедливо след: после отбрасывания любого конеч. числа первых слаг. среди оставшихся слагаемых можно выбрать столько, что их сумма превзойдёт любое наперёд взятое число.

Фикс. любое веществ. число $L>0$. Выберем из ряда P ровно столько слагаемых (первых), чтобы их Σ превзошла L.

$$p_1+\ldots+p_{k_1}>L \quad (p_1+\ldots+p_{k_1-1}\leq L)$$

Из ряда Q ~~аналогично~~: выбираем ровно столько слаг. q_k, чтобы

$$p_1+\ldots+p_{k_1}-q_1-q_2-\ldots-q_{k_2}<L$$

Далее выбираем из ряда P ровно столько, чтобы $\Sigma>L$

$$p_1+\ldots+p_{k_1}-q_1-q_2-\ldots-q_{k_2}+p_{k_1+1}+\ldots+p_{k_3}>L$$
и т.д.

Получаем нек. новый ряд. На каждом шаге мы добавляем или вычитаем хотя бы одно слаг. из (1) => в итоге в новый ряд войдут все слаг. ряда (1) и никаких посторонних слаг. в нём не будет.

Докажем, что построенный ряд $\to L$

Т.к. (1) - сход. => $u_k \underset{k\to+\infty}{=} \bar{o}(1) \Rightarrow p_k \underset{k\to+\infty}{=} \bar{o}(1),\ q_k \underset{k\to+\infty}{=} \bar{o}(1)$

Новый ряд состоит из последовательных групп „+" и „−" слагаемых.
Фиксируем любое $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим частичную сумму S_n нового ряда.

Если S_n оканчивается полностью завершённой группой, то она отличается от L не более, чем модуль последнего слагаемого этой последней группы (иначе бы могли прибавить (вычесть) последний член)

$|S_n - L| \le p_{k_i+2}$

Если S_n оканчивается незавершённой группой, то S_n отличается от L не более чем на модуль последнего слагаемого предпоследней группы. (т.е. последний завершённой группы)

$|S_n - L| \le q_{k_i}$

=> для того, чтобы д-ть, что ряд $\to L$, достаточно д-ть последних членов групп явл. б.м.п. т.к. не заканчивается

Но это так, т.к. $p_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0,\ q_k \to 0$

Задача: В ~~качестве~~ $L = \{+\infty, -\infty, \infty\}$ тоже подходят

Теорема 10 (теор. Коши) Если (1) сход. абс, то как бы мы не переставляли слагаемые, то (1)' будет сходиться (абсолютно) и к тому же пределу.

Д-во пусть ряд (1) сход. абс. => $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$:

(3) $\sum\limits_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ (сумма (1) $= S$)
(остаток ряда, опр. предела)

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k$ - нек. ряд, полученный из (1) путём перестановки.

Д-ть: 1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k$ (2) - сход. и его сумма $= S$

2) (2) сход. абс.

1) Обозначим S_n, S'_n - част. суммы (1) и (2) соотв. Фиксируем N настолько большим ($> N_0$) чтобы $\forall n > N$ в S'_n входили все слагаемые u_k ряда (1), $k \le N_0$

$|a+b| \le |a| - |b|$
$a^2+b^2+2ab \le a^2-2ab+b^2$
$ab \le |ab|$

Пусть $n > N$, рассмотрим:

$$|S'_n - S| = |S'_n + S_{N_0} - S_{N_0} - S| \le$$

$$\le |S'_n - S_{N_0}| - |S_{N_0} - S| \le$$

взаимоуничтожатся ↑ тоже (3), остаток ряда

$$\le \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| + \sum_{k=N_0}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

в первом модуле все первые N_0 слагаемых

ряда (1) взаимоуничтожатся

$\Rightarrow$ ряд (2) – сходится и его сумма $= S'$

2) Достаточно повторить рассужд. 1) применительно к рядам

$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|u'_k|$

$\Rightarrow$ (2) – сход. абс. и его сумма = сумма $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ чтд.

§4 Сложение и умножение сходящихся числовых рядов

Рассмотрим числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (а), $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ (б), $u_k, v_k \in \mathbb{R}$ (1)

U_n, V_n – частичные суммы этих рядов
U, V – их суммы.

Теорема 11 Пусть (1) сходятся, тогда сходится (а) $\pm$ (б) $\left(= \sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k) = U \pm V\right)$ либо все + либо все –

То есть сходящиеся ряды можно почленно складывать (вычитать)

Д-во: $\forall n$: $\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k \pm \sum_{k=1}^{n} v_k =$

$= U_n \pm V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} U \pm V$ (было д-но) чтд

Теорема 12. Пусть ряды (1) сход. абсолютно. Тогда ряд, полученный из всевозможных произведений $u_k \cdot v_l$ (в произвольном порядке занумерованных) сходится абс. и его сумма $= U \cdot V$

Д-во: Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$, составленный из всевозможных чисел $u_l \cdot v_m$, занумерованных в произвольном порядке. Д-жем, что ряд сходится абсолютно.

Фиксируем произвольный n и рассм. $\sum_{k=1}^{n}|w_k|$. В эту сумму входит слагаемое $u_l \cdot v_m$ с нек. номерами l и m. Через p обозначим наиб. из номеров (l, m) членов рядов (1), входящих в эту сумму.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|w_k| \le \left(\underbrace{|u_1| + \dots |u_p|}_{\text{огр}}\right)\left(\underbrace{|v_1| + \dots + |v_p|}_{\text{огр}}\right)$

Т.к. ряды (1) сход. абс $\Rightarrow$ част. их суммы ограничены $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{n}|w_k|$ – ограничена

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|w_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$ (т.е. сходится).

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} w_k$ сход. абс. $\Rightarrow$ {по т. Коши}

при любой перестановке слаг. ряд сходится и сумма не меняется.

Рассмотрим под. посл-ть частичных сумм вида:

$(u_1 + \dots + u_n)(v_1 + \dots + v_n) = U_n \cdot V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} U \cdot V$

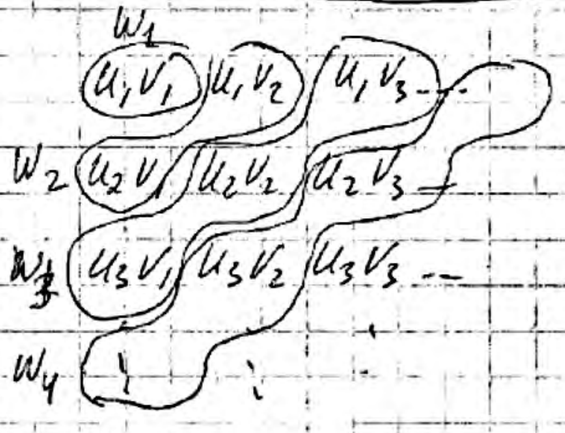
$\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ имеет суммой число $U \cdot V$

Но т.к. ряд сходится уже $\Rightarrow$ все подпосл-ти сходятся к числу (и оно равно UV), чтд.

Правило Коши перемножения рядов

(*) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right) = \overbrace{u_1 v_1}^{w_1} + \overbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1)}^{w_2} + \dots +$

$+ \underbrace{(u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \dots + u_k v_1)}_{w_k} + \dots$



Сумма индексов одинаковая.

$\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ (**)

Теорема 13 (теор. Мертенса)

Пусть ряд (1) сход. и хотя бы 1 сход. абс. Тогда (**) сходится и его сумма = UV

($\sum u_k$ сход абс, $\sum v_k$ - усл.)

Д-во: $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = u_1(\underbrace{v_1 + v_2 + \dots + v_n}_{V_n}) +$

$+ u_2(\underbrace{v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}}_{V_{n-1}}) + \dots +$

$+ u_n(v_1) =$ ($v_1 = V_1$)

$\{v_k = V + (v_k - V)\}$

$= u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + \dots + u_n V_1 =$

$= u_1 V + u_2 V + \dots + u_n V + u_1(\underbrace{V_n - V}_{\alpha_n}) +$

$+ u_2(\underbrace{V_{n-1} - V}_{\alpha_{n-1}}) + \dots + u_1(\underbrace{V_1 - V}_{\alpha_1})$ (=)

(=) $V(\underbrace{u_1 + \dots + u_n}_{n \to \infty} U) + \underbrace{(u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \dots + u_n\alpha_1)}_{(V)}$

Покажем, что $u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \dots + u_n\alpha_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\alpha_k = v_k - V \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Расм. $m < n$

$(V) \Rightarrow |(u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \dots + u_m\alpha_{n-m+1}) +$

$+ (u_{m+1}\alpha_{n-m} + \dots + u_n\alpha_1)| \le$

$\le \underbrace{(|u_1|}_{\text{огран}}\underbrace{|\alpha_n|}_{\to 0} + \dots + \underbrace{|u_m|}_{\text{огран}}\underbrace{|\alpha_{n-m+1}|}_{\to 0}) +$

$(\underbrace{|u_{m+1}|}_{\text{огр.}}\underbrace{|\alpha_{n-m}|}_{\to 0} + \dots + \underbrace{|u_n|}_{\to 0}\underbrace{|\alpha_1|}_{\text{огр}}) = (\mathcal{U})$ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Т.к. $\alpha_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, $\{|u_k|\} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$ они ограничены

и $\exists\, M > 0$: $|\alpha_k| \le M$ $|u_k| \le M$ $\forall k$

Т.к. $\sum |u_k|$ сход. $\Rightarrow$ пп-ть его частичных сумм имеет предел $\Rightarrow$ ограничена

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |u_k| \le M$ $\forall n$ (M - выбираем максимум из констант)

Т.к. $\sum |u_k|$ сход $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}$:

$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \varepsilon$

Т.к. п-ть $\{\alpha_k\}$ – б.м., то $\forall \varepsilon > 0$ и выбранного m $\exists n_1 \; \forall n \geq n_1$:

$|\alpha_{n-m+1}| < \varepsilon$

$(VV) \leq \varepsilon M + M\varepsilon = 2M\varepsilon = \varepsilon_1 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2M}$

(для $|\alpha_k|$; сумма от v_k; огр. α_k)

Замечание: Если оба перемножаемых ряда сходятся условно, то их произведение (даже составленное по правилу (**)) может давать расходящийся ряд.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ и $\sum_{k=1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ оба сходятся условно

w_k – не выполнено необходимое условие сходимости

§5 Сходимость произвольных рядов

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

1) Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ → «да» (*) сход. (абс.); «нет» ←

2) Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

Нужны достаточные признаки.

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ (шаблон; $v_k = a_k$)

① Пос-ти с огр. изменением

$\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет огранич. изм. (BV — bounded variation) если сходится следующий ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|$

Утв 1 Любая посл. с огр. изм. – сходящаяся

Д-во: $\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|$ сход. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (v_{k+1} - v_k)$ сход. (к S')

$S'_N = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + (v_4 - v_3) + \ldots$

$\ldots + (v_{N+1} - v_N) = v_{N+1} - v_1 \to S'$ (пост.)

$\Rightarrow v_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} S' + v_1$, чтд

Утв 2 Утв, обратное утв 1, неверно.

Д-во $v_k = \frac{(-1)^k}{k} \to 0$ $\quad |v_{k+1} - v_k| = \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| =$

$= \left|(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right| = \left|\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}$

$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} - 1 =$

$= 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \frac{1}{N+1} - 1 = 2H_N + \frac{1}{N+1} - 1 =$ бб (б.б. + б.м.)

$\Rightarrow v_k$ не явл. пос. с огр. изм.

Утв 3 Любая огр. монотонная пос. $\{v_k\}$ имеет ограниченное изменение

Д-во | $\exists \lim_{k\to+\infty} v_k = v$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k| = (V)$ (все разности одного знака, т.к. монотонно)

$\{v_k\}\uparrow \Rightarrow v_{k+1} \geq v_k \quad \forall k$

$\{v_k\}\downarrow \Rightarrow v_{k+1} \leq v_k$

$(V) = \pm \sum_{k=1}^{\infty} (V_{k+1} - V_k)$ (3) сходится $\Rightarrow$ (3) сходится, т.д. (см. д-во утв. 1)

$S_n = V_{N+1} - V_1 \Rightarrow V - V_1$ (случай +)
сход к V

2° Преобразование Абеля

Утв 4. Рассмотрим $\{u_k\}, \{v_k\}$; $S_n = u_1 + \ldots + u_n$, $S_0 = 0 = u_0$. Тогда выполнено след. р-во:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n$$

$(\forall n, \forall p)$

Д-во $\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k =$ ($u_k = S_k - S_{k-1}$)

$= \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k -$ ($k_1 = k-1$)

$- \sum_{k_1=n-1}^{n+p-1} S_{k_1} v_{k_1+1} = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} -$

$- S_{n-1} v_n = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} + S_{n+p} v_{n+p} -$

$- S_{n-1} v_n = \sum_{k=n}^{n+p-1} (S_k v_k - S_k v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n$

3° Достаточные признаки сходимости

Теор. 14 (1-ый признак Абеля). Пусть

$(*)$ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$; $S_n = u_1 + \ldots + u_n$, тогда если

1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сход.
2) $\{v_k\}$ имеет огр. изм.

$\Rightarrow (*)$ сход.

Д-во: По утв. 1. $V = \lim_{k \to +\infty} v_k$,

$S = \lim_{k \to +\infty} S_k$

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ {преобр. Абеля}

$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} \right|$ (уменьшили только нижний)

$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k| |v_k - v_{k+1}| + \left| (S_{n+p} v_{n+p} - SV) - \right.$ ($S_{n+p} v_{n+p} \to SV$)

$\left. - (S_n v_{n+1} - SV) \right| = (*)'$ ($S_n v_{n+1} \to SV$)

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n \geq N$:

$|S_n v_{n+1} - SV| < \varepsilon/3$

$|S_n v_n - SV| < \varepsilon/3$

$n+p$ т.к. $\forall n \geq N$

Т.к. S_k имеет предел $\Rightarrow$ её можно ограничить:

$M>0: |S_k| \le M \ \forall k \in \mathbb{N}$

Для фикс. ε $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N \ \forall p$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |V_{k+1} - V_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

V_k огр. убыв. $\Rightarrow$ сходится

$\Rightarrow (*)' \le M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Теор 15 (2-ой признак Абеля) Пусть $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k v_k$, $(*)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

Тогда, если 1) $\{S_n\}$ огр.
2) $\{V_k\}$ имеет огр. пред. и $\{V_k\} \to 0$
$\Rightarrow (*)$ сход

Надо, чтобы такое же

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (V_k - V_{k+1}) + S_{n+p} V_{n+p} - S_n V_{n+1} \right| \le$$

(оценка такая же; S_{n+p} огр. б.м., V_{n+1} огр. б.м.)

$$\le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k| |V_k - V_{k+1}| + |S_{n+p}| |V_{n+p}| + |S_n| |V_{n+1}| < M \frac{\varepsilon}{3M} + M \frac{\varepsilon}{3M} + M \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon, \text{ что и требовалось}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \ge N \ \forall p \in \mathbb{N}: \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |V_{k+1} - V_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$

$|V_n| < \varepsilon / 3M$

Теорема 16 (признак Дирихле-Абеля)

Пусть в $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k v_k$ $(*)$:

1) $S_N = \sum_{k=1}^{N} u_k$ ограничена
2) $\{V_k\} \searrow 0$ (монотонно)
$\Rightarrow (*)$ сходится

Д-во: Ну т. 15 $\Rightarrow \{V_k\}$ имеет ограниченное изменение, что и требовалось.

Следствие т. 14 (Теорема 17, признак Абеля)

Пусть в $(*)$ 1) $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ сход.
2) $\{V_k\}$ монотонна огр.
$\Rightarrow (*)$ сходится

Д-во: Следствие т. 14

Теорема 18 (признак Лейбница)

Пусть в знакочередующемся ряде $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k V_k$, где $V_k \ge 0$, $\{V_k\} \searrow 0$ (монот.)

Тогда этот ряд сходится

Д-во: следствие т. 16: $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \le 0$, что и требовалось.

Пример:

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, x - фикс. число

$v_k = \frac{1}{k^\alpha} \searrow 0$, $S_N = \sum_{k=1}^{N} \cos kx = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos Nx$

$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\cos x + \sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + \sin\frac{x}{2}\cos Nx\right)$

$= \{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\} =$

$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cancel{\sin\frac{3x}{2}} + \sin\left(-\frac{x}{2}\right) + \cancel{\sin\frac{5x}{2}} + \cancel{\sin\left(-\frac{3x}{2}\right)} + \right.$

$\left. + \ldots + \sin x\left(N+\frac{1}{2}\right) + \cancel{\sin\left(x\left(\frac{1}{2}-N\right)\right)}\right) =$

$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\underbrace{\sin\left(x\left(N+\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\frac{x}{2}}_{\leq 2}\right) \cancel{\leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}}$

$\Rightarrow |S_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

При $x=0$ $\sum\cos$ неограничена

$x \in (0, 2\pi)$ $(\sin\frac{x}{2} \neq 0)$

2) $(*)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos kx|}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сход. при $\alpha > 1$

$\Rightarrow$ При $\alpha > 1$ $(*)$ сход.

$0 < \alpha \leq 1$?

3) $\sum_{k=1}^{N} \frac{|\cos kx|}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{\cos^2 kx}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\cos 2kx + 1}{2k^\alpha} =$

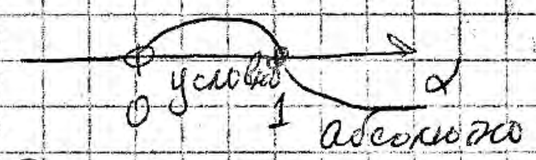
$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\cos 2kx}{k^\alpha}}_{\text{сход.}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}}_{\text{расх}} \Rightarrow (*)$ расх

имеет предел при $0 < \alpha \leq 1$ $x \in (0, \pi)$, $x \in (\pi, 2\pi)$

При $x = \pi, 2\pi$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(-1)^k|}{k^\alpha}$ он расходится

без модуля – знакопеременный ряд



§6 Бесконечные произведения

$\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$: $v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n \cdot \ldots = \prod_{k=1}^{+\infty} v_k$ –

– бесконечное произведение $(*)$

$P_N = \prod_{k=1}^{N} v_k$ – частичное произведение

Опр: $(*)$ сходится к P $(P \neq 0)$, если $\exists \lim_{N\to+\infty} P_N = P$

$P = 0$: пр-е (1), ряд расходится к 0

Зам. $\forall v_k \neq 0$

Теорема 1 Если $(*)$ сход., то $\lim_{k\to+\infty} v_k = 1$

Д-во: $v_k = \frac{P_k \to P}{P_{k-1} \to P}$ $\forall k \geq 2$, $k \to +\infty$

$\downarrow$ 1, ч.т.д.

Пример $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$

$$P_N = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^N}\cdot\sin\frac{x}{2^N} \Big/ \sin\frac{x}{2^N}$$

$$= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{N-1}} \Big/ \sin\frac{x}{2^N} = \dots =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^N \sin x \Big/ \sin\frac{x}{2^N} = \frac{\sin x}{2^N \sin\frac{x}{2^N}} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^N}}{\sin\frac{x}{2^N}} \to 1$$

$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\sin x}{x}$

$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \pi/2$ (ф-ла Валлиса)

Необх. условие сход. (*): $v_k \to 1$

Начиная с нек. номера $v_k > 0$

Утв. 2 Пусть в (*): $v_k > 0$ $\forall k$. Тогда
(*) сходится $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k$ сходится (**)

Д-во: $\ln P_n = \sum_{k=1}^{N} \ln v_k = S_N$ ряд (**)

P_n имеет предел $\Leftrightarrow$ $\ln P_n$ имеет предел
$\Leftrightarrow$ S_n имеет предел, что и требовалось

Пусть $v_k = 1 + u_k$ $(u_k > -1)$. Рассмотрим случаи, когда
$u_k > 0$ с нек. номера

$\Rightarrow$ логарифмы положительны с нек. номера
$\Rightarrow$ $\sum \ln v_k$ – знакопост. ряд

Теорема 3: Пусть $u_k > 0$ $\forall k \geq k_0$. Тогда
(*) $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ сход. $\Leftrightarrow$ сход. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

Д-во: (т. 2.) Сход. (*) $\in$ Сход. (**)

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k)$ $\quad v_k \to 1 \Leftrightarrow u_k \to 0$ (необх. усл. сход.)

$\Leftrightarrow \ln(1+u_k) \sim u_k$ при $k \to +\infty$

$\Rightarrow$ Ск-ть этого ряда $\Leftrightarrow$ сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, что

§7 Элементарная теория двойных и повторных рядов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & & a_{2l} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{k1} & \cdots & & a_{kl} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \end{pmatrix}$$ бесконечная матрица

Двойной ряд $\sim \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ (1)

Повторный ряд $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = A_k$ $\forall k$ (построчно)

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$$

Сходимость повторного ряда $\to \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится.

Если по столбцам сходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} = B_l \quad \forall l$$

сход. $\sum_{l=1}^{\infty} B_l \equiv \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right)$ сход.

Сход двойного ряда

Опр (1) $\to S$, если $\exists \lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} S_{nm} = S$, где

$$S_{nm} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{kl} \quad (\text{прямоугольная сумма})$$

Иными словами $\forall \varepsilon>0$ $\exists m_0, n_0 \in \mathbb{N}$:
$\forall m \geq m_0$, $\forall n \geq n_0$: $|S_{nm} - S| < \varepsilon$

Пример: В мат. A: $a_{kl} = b_k \cdot c_l$

$$S_{nm} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} b_k c_l = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{l=1}^{m} c_l =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)\left(\sum_{l=1}^{m} c_l\right)$$ Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сход

и $\sum_{l=1}^{\infty} c_l$ сход к B и C, то

$S_{nm} \to BC$ при $\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}$

Пример

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \hline 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & \cdots & & \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & \cdots & & \\ \hline 1/3 & \cdots & & & & & \\ -1/3 & \cdots & & & & & \\ \hline \vdots & & & & & & \end{array}\right)$$

Если четное число строк, то 0
Если четное число столбцов, то 0

$n = 2k$, $\forall m$: $S_{nm} = 0$
$m = 2l$, $\forall n$: $S_{nm} = 0$

Если $n = 2k+1$, $m = 2l+1$, то $S_{nm} = a_{nm}$ (угловому числу)

$\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} S_{nm} = 0$ (Двойной ряд)

$A_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ - расходятся $\forall k$ (по строкам)

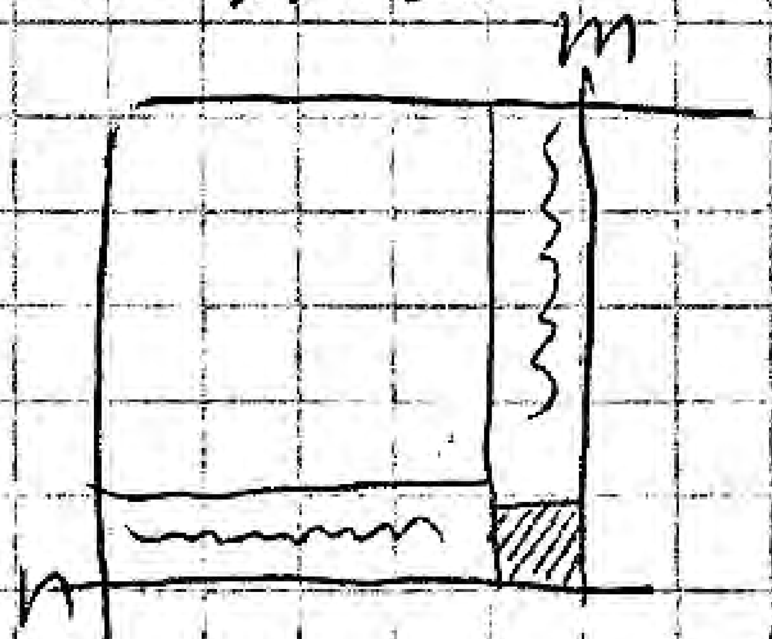
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right) \not\equiv$ (расходится)

$B_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} = 0 \ \forall l$ (по столбцам)

$\Rightarrow \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right) = 0$, сходится

Теорема 1 (необх. усл. сход.) Если двойной ряд (1) сход., $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} a_{nm} = 0$

Д-во



$$a_{nm} = \underbrace{S_{nm} + S_{n-1,m-1}}_{\to 2S',\ n,m\to+\infty} - \underbrace{S_{n,m-1} - S_{n-1,m}}_{\to 2S,\ n,m\to+\infty} \to 0, \quad n,m\to+\infty$$

Пример

$$(a_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \end{pmatrix}$$

Двойной ряд не сходится т.к. $a_{nm} \not\to 0$ (на диагонали например)

Повторный ряд сходится (по строкам)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = 0 \qquad \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = A_k$$

По столбцам:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} = 1$$

Теорема 2 Если двойной ряд сходится, кроме того, сходятся все ряды A_k (по строкам) $\Rightarrow$ сходится повторный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, причём к сумме двойного ряда

Замечание: Аналогичное утв. верно и для др. повторного ряда

Д-во Пусть $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} = S' \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} = S'$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall m \ge m_0,\ n \ge n_0 \Rightarrow |S'_{mn} - S'| < \varepsilon$

Перейдём к пределу при $n\to+\infty$ (фикс. m)

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\underbrace{\sum_{l=1}^{n} a_{kl}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} A_k} \xrightarrow{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} A_k$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{m} A_k - S'\right| \le \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} A_k \xrightarrow[m\to+\infty]{} S'$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k = S' \quad \text{чтд}$$

Пусть в двойном ряде $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ $a_{kl} \ge 0\ \forall k,l$

Теорема 3 Необходимое и достаточное условие сходимости

В этом случае двойной ряд сх. $\Leftrightarrow$ мн-во частичных сумм S_{mn} ограничено

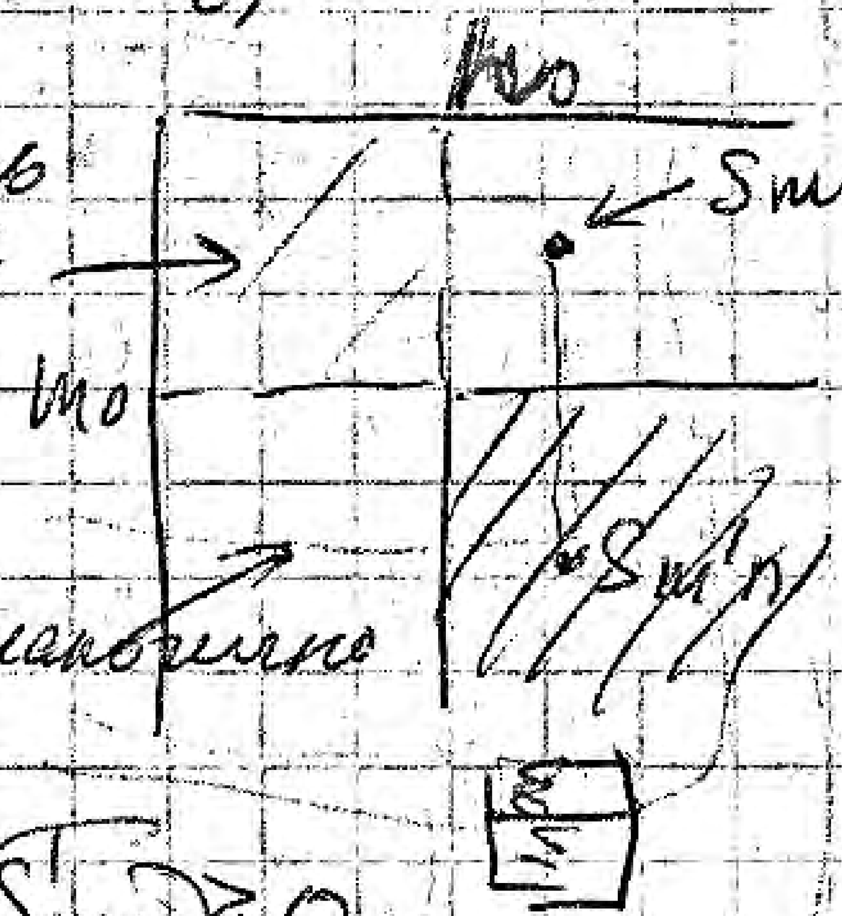
Д-во: $S_{mn} \ge 0\ \forall m,n$

"$\Rightarrow$" Из опр. сходимости $\Rightarrow$ положим $\varepsilon = 1 \Rightarrow |S_{mn} - S| < 1 \Leftrightarrow$

$S-1 < S_{mn} < S+1 \quad \forall m \ge m_0,\ n \ge n_0$

~~То, что в начале ($m<m_0$, $n<n_0$) — конечное число~~

S_{mn}, $1 \le m < m_0$, $n \geq n_0$ — а здесь конечное число



$S_{m'n} \geq S_{mn}$, $m' \geq m_0$ — аналогично

$\Rightarrow \quad S+1 > S_{m'n} \geq S_{mn} \geq 0 \Rightarrow$ ограничена

"$\Leftarrow$" Пусть $\{S_{mn}\}$ ограничено сверху числом S — точная верхняя грань $\sup S_{mn}$

$S_{mn} \le S \quad \forall m, n$

$\exists\, m_0, n_0: \; S-\varepsilon < S_{m_0 n_0} \le S \quad \forall \varepsilon > 0$

все суммы с индексами S_{mn} ($m \geq m_0$, $n \geq n_0$) находятся здесь

т.к. $S_{m_0 n_0} \le S_{mn}$

$\Rightarrow S-\varepsilon < S_{m_0 n_0} \le S_{mn} \le S \Rightarrow S_{mn} \xrightarrow[n\to+\infty]{m\to+\infty} S$, ч.т.д.

Опр. Двойной ряд абс. сходится, если сходится двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}| \quad (*)$$

Теорема 4. Если $(*)$ сходится $\Rightarrow \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ сходится

Д-во. $(*)$ сход $\overset{Т.3}{\Rightarrow}$ мн-во его частичных сумм ограничено.

Рассм: $p_{kl} = \frac{1}{2}(|a_{kl}| + a_{kl}) = \begin{cases} 0, & a_{kl}<0 \\ a_{kl}, & a_{kl} \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow p_{kl} \geq 0$

$q_{kl} = \frac{1}{2}(|a_{kl}| - a_{kl}) = \begin{cases} 0, & a_{kl}>0 \\ |a_{kl}|, & a_{kl}<0 \end{cases}$

$\Rightarrow q_{kl} \geq 0$

Т.к. $p_{kl}, q_{kl} \le |a_{kl}| \Rightarrow$ ряды $\sum_{k,l=1}^{\infty} p_{kl}$, $\sum_{k,l} q_{kl}$ имеют ограниченные мн-ва частичных сумм.

$\overset{Т.3}{\Rightarrow}$ они оба сходятся (их суммы равны P и Q)

$\Rightarrow$ сход. ряд $\sum_{k,l=1}^{\infty} (p_{kl} - q_{kl}) = \sum_{k,l} a_{kl}$, ч.т.д.

Рассм. след. ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \quad (1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| \quad (1')$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (2) \qquad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}| \quad (2')$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \quad (3) \qquad \sum_{k,l} |a_{kl}| \quad (3')$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r \quad (4) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} |a_r| \quad (4')$$

Ряд $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ – полученный из двойного какой-либо нумерацией ~~[illegible]~~ элементов $\{a_{kl}\}$

Теорема 5. Если хотя бы 1 из рядов (1') – (4') сходится, то сходятся все ряды в левом столбце (1) – (4), причём к одной и той же сумме.
(~ перестановка слагаемых в абс. сход. ряде)

Д-во. Схема:

$$\overset{\text{сход}}{(1')} \Rightarrow (4') \Rightarrow (3') \Rightarrow (2')$$

$$\Downarrow \quad\quad \Downarrow \quad\quad \Downarrow \quad\quad \Downarrow$$

$$(1) \quad\quad (4) \quad\quad (3) \quad\quad (2)$$

В д-ве не будем рассматривать (1') ⇔ (1), (2) и (2') – они аналогичны (1) и (1')

Сначала докажем факт сходимости, потом совпадение сумм

(1') ⇒ (4'). Рассм. част. сумму S_p' ряда (4')
В силу построения $\forall p \in \mathbb{N}\ \exists m, n \in \mathbb{N}$

$S_p' \le S_{mn}'$ (найдём max m и n и ограничим)
(S_{mn}' – част. сумма ряда (3'))

$S_{mn}' \le S'$ в силу сходимости (1') (разобрать!!!)

$\sum^m \sum^n a_{ij} \le \sum^m \sum^\infty a_{ij} \le \sum^\infty \sum^\infty a_{ij} \le S$ (огр)

⇒ мн-во $\{S_p'\}$ одинарного ряда (4') ограничено ⇒ (4') сходится

(4') ⇒ (4) (обычные ряды)

(4') ⇒ (3'). Рассм. мн-во част. сумм $\{S_{mn}'\}$ ряда (3'): $\forall m, n\ \exists p: S_{mn}' \le S_p' \le S'$ – огр.
⇒ S_{mn}' огр. $\overset{\text{т.3}}{\Rightarrow}$ ~~[illegible]~~ (3') сход.
$\overset{\text{т.4}}{\Rightarrow}$ (3) сход.

(3') ⇒ (1'). Чтобы доказать сходимость каждого из рядов (1) и (1'), в силу т.2 достаточно д-ть, что

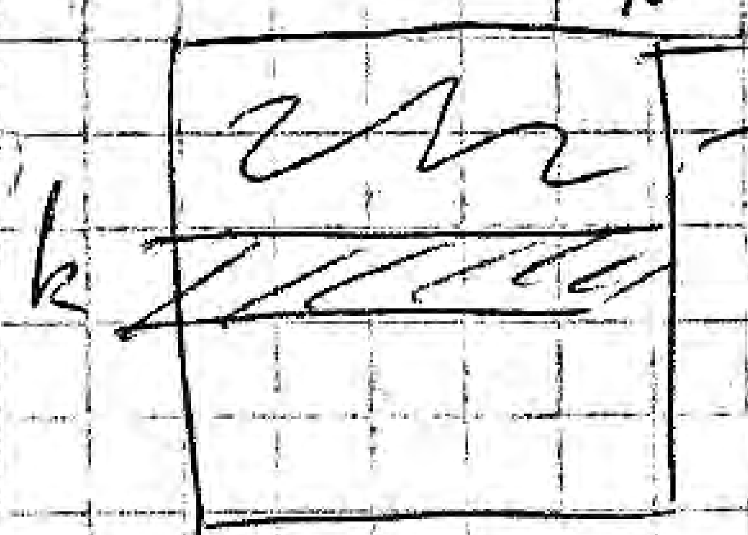
$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| \ (**) \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \quad \text{сходится } \forall k$$

Докажем только (**) (т.к. автоматически одинарные ряды)

(**) сход., т.к.:

$$\sum_{l=1}^{N} |a_{kl}| \le \sum_{k_1=1}^{k} \sum_{l=1}^{N} |a_{k_1 l}|$$

(добавим все предыдущие строки)
↑ част. сумма (3')
⇒ ограничено $\overset{\text{т.3}}{\Rightarrow}$ (**) сходится



По т.2 (1) = (3)

По т. ~~[illegible]~~ Коши (3) = (4), т.к. сходятся (3') = (4') (о перестановке слагаемых в абс. сход. рядах)

§8 Обобщённые методы суммирования

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \to S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \to \lim_{n\to+\infty} S_n = S'$$)) обычное обыч.

[новый способ] → S' – обобщённая сумма (lim переход)

Опр 1 Метод суммирования назыв. линейным, если ∀ двух рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, суммируемых рассматриваемым методом к обобщ. суммам v', V': ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha v' + \beta V'$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ при суммировании этим методом.

Опр 2 Метод суммирования назыв. регулярным, если любой обычный сход. ряд суммируем этим методом, причём его обобщённая сумма совпадает с обычной суммой этого ряда.

1° Метод средних арифметических (метод Чезаро)

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ суммируем методом Чезаро, если послед. его част. сумм $\{S_n\}$ обладает след. св-вом:

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{S_1+\dots+S_n}{n} = S$$ – обобщённая сумма этого ряда

Теорема 1 Метод Чезаро линеен и регулярен

Д-во $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \xrightarrow{\text{мет. Ч}} v$, $\sum_{k=1}^{\infty} V_k \xrightarrow{\text{мет. Ч}} V$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k : \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{v_1+\dots+v_n}{n} = v$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k : \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{V_1+\dots+V_n}{n} = V$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha u_k + \beta v_k)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k + \beta \sum_{k=1}^{n} v_k = \alpha v_n + \beta V_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}(S_1+\dots+S_n) = \alpha \frac{1}{n}(v_1+\dots+v_n) + \beta \frac{1}{n}(V_1+\dots+V_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha V + \beta v$$ ⇒ линейность доказана

Регулярность:

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сход ⇔ $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S'$

(где Коши ☐ Даламбера) ⇒ (теор 6.8) $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(S_1+\dots+S_n) = S'$ ⇒ метод регулярен, чтд

Пример 1 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} = 1-1+1-1+\dots$

$S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ \dots$

$\frac{1}{n}(S_1+\dots+S_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n=2k \\ \frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n}, & n=2k+1 \end{cases} \to \frac{1}{2}$

Замечание У каждого метода суммирования есть область применения

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ - степенной ряд, $|z|<1$

При приближении к границе сход. ряд сх., но очень медленно
Некоторые методы убескоряют

Зам Если $\sum u_n$ - гармонич. и расх. ($S_n \to \pm\infty$), то в силу св-ва средн. ариф
$\frac{1}{n}(S_1+\dots+S_n) \to \pm\infty$ (метод не применим к такими рядам)

Пример 2 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot k = 1-2+3-4+\dots$

$S_1=1,\ S_2=-1,\ S_3=2,\ S_4=-2$

$S_n = \begin{cases} -n/2, & n=2k \\ \frac{n+1}{2}, & n=2k+1 \end{cases}$

$S_k+\dots+S_n = \begin{cases} 0, & n=2k \to 0 \\ \frac{n+1}{2}, & n=2k+1 \to 1/2 \end{cases} \Rightarrow$ не $\sum$ методом Чезаро

(2) Метод Пуассона–Абеля

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1}$ (*) $x\in[0,1)$ ← степенной ряд по переменной x

Зам Если u_k огр., то (*) сход. при $x\in[0,1)$ (Абель–Дирихле)

$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} \rightsquigarrow \lim_{x\to 1^-} S(x) \equiv S^1$ - обобщ. $\sum$

Пример 1 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^{k+1} =$

$= \sum_{k=1}^{\infty}(-x)^{k+1} = \frac{1}{1+x}$ (геом. прогр)

$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}$

Зам: можно д-ть, что всякий ряд, когда Чезаро дает Σ, П-А дает ту же сумму

Пример 2 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k$ $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k\,x^{k-1}$

$x\in[0,1)$, фикс.

$\int_0^x S(x)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x (-1)^{k+1}k\,t^{k-1}\,dt =$

1 законность перехода будем обосновывать далее в курсе

$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \underset{x\to 1}{\to} 1/4$

Теорема: М. П-а линейн и регулярен

Д-во $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightsquigarrow S_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1}$, $\exists \lim_{x\to 1^-} S_1(x) = v$

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \rightsquigarrow S_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k x^{k-1}$, $\exists \lim_{x\to 1^-} S_2(x) = V$

$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) \rightsquigarrow S(x) = \alpha S_1(x) + \beta S_2(x) \underset{x\to 1^-}{\to} \alpha v + \beta V$

$\Rightarrow$ лин. д-на

регулярность: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$ - сход.

1) н. усл. $u_k \to 0 \Rightarrow \exists M > 0$ | 2 пред. перехода нельзя переставлять без оговорок

$|u_k| \le M \ \forall k$

$(|u_k x^{k-1}| \le M \cdot x^{k-1} \Rightarrow$ по признаку ср(с геом. пр.) $\exists S(x) \ \forall x \in [0, 1))$

2) $\sum_{k=1}^{p+1} u_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{p+1} (S_k - S_{k-1}) x^{k-1} =$

$S(x)$ сх. по $\{ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad u_n = S_n - S_{n-1} \quad S_0 \overset{def}{=} 0 \}$

$= \sum_{k=1}^{p+1} S_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{p+1} S_{k-1} x^{k-1} \underset{\{S_0 = 0\}}{=}$

$= \sum_{k=1}^{p+1} S_k x^{k-1} - \sum_{k=2}^{p+1} S_{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{p+1} S_k x^{k-1} -$

$- \sum_{k=1}^{p} S_{k} x^{k} = \sum_{k=1}^{p} S_k (x^{k-1} - x^k) + S_{p+1} x^p$ ($S_{p+1}x^p \to 0$)

Переходим к lim при $p \to +\infty$

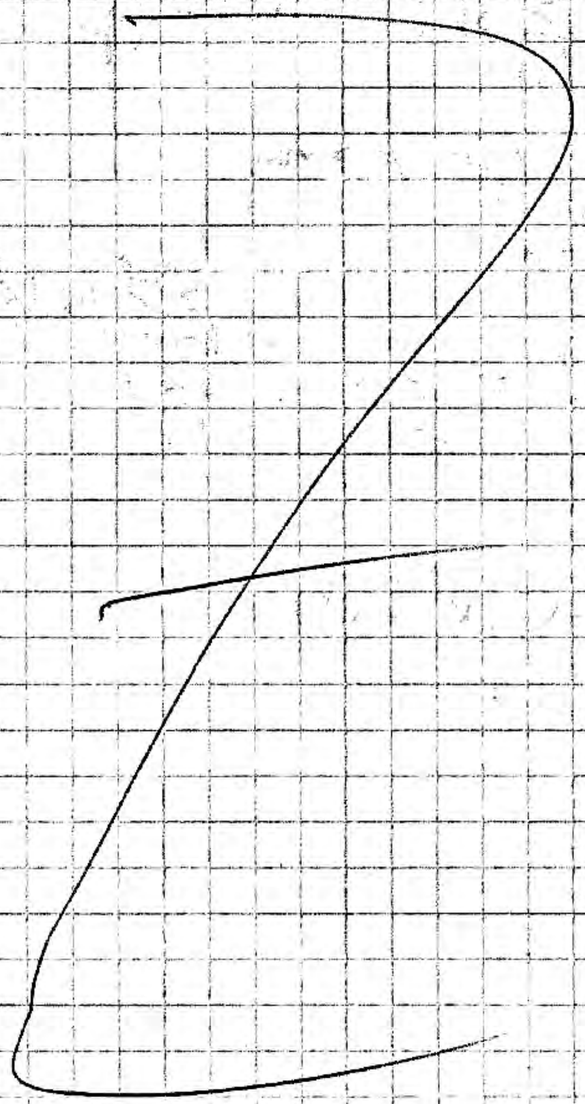
$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k (x^{k-1} - x^k)$

$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} S (x^{k-1} - x^k)$

т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$

$S(x) - S = \sum_{k=1}^{\infty} (S_k - S)(x^{k-1} - x^k) =$

$= (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} (S_k - S) x^{k-1}$



исх. ряд → S

$$\forall \varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\geq k_0 \Rightarrow |S_k-S|<\varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty}(S_k-S)x^{k-1}\right| \leq (1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty}|S_k-S|x^{k-1}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty}x^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}$$

const k_0 выбрано $= C$

$$\left|(1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1}(S-S_k)x^{k-1}\right| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1}|S-S_k| <$$

$< \frac{\varepsilon}{2}$ т.к. x близко к 1 $\Leftrightarrow (1-x)<\frac{\varepsilon}{2C}=\delta$, чтд.

Глава II Функциональные последовательности и ряды

$\{f_n(x)\}$ – посл. чисел. зависит от параметра (x) – функциональная посл.

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ – функ. ряд.

Все ф-ции $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$ } определены на мн-ве $X\subset\mathbb{R}$

Все ф-ции $u_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$ }

§1 Различные виды сходимости

1° Поточечная сходимость

(28)

$\{f_n(x)\}$ – сходится при $x=x_0\in X$ – функц. посл. сход. в т. x_0

$\Rightarrow \{X_0\}$ – <u>область сходимости</u> для $\{f_n(x)\}$

<u>Примеры</u> ① $f_n(x) = x^n$ $\quad X = \mathbb{R}$

$\{f_n(x)\}$ сход $\Leftrightarrow$ $x \in (-1, 1] = \{X_0\}$

<u>Предельная ф-ция</u> $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$

② $\{u_n\}$ – числ. пос., огр.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n x^{n-1}$ <u>степенной функц. ряд</u>

сходится $\Leftarrow$ $|x| < 1 \Rightarrow$ Его обл. сходимости содержит $(-1, 1)$

③ $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \Rightarrow$ его обл. сход. $\{X_0\} = \mathbb{R}$

(2°) <u>Равномерная сходимость</u> Пусть $X_0 \subset \{X_0\} = X$, где X – обл. сход. $\{f_n(x)\}$

<u>Опр</u> $\{f_n(x)\}$ <u>сходится</u> (к $f(x)$) на X_0 <u>равномерно</u>, если:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in X_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

<u>Обозначение</u>: $f_n(x) \overset{X_0}{\rightrightarrows} f(x)$

<u>Замечания</u> 1) Ц равн. сход. пос. на X_0 $\Rightarrow$ ее равн. сход. на $\forall X_0' \subset X_0$

2) Равн. сход. на $X_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x \in X_0} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

Возьмем точную верхнюю грань

$A_n = \sup\limits_{x \in X_0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ <окр> $\Rightarrow \exists$ sup на X_0

↑ не зависит от x

③ Ц поточечная сход. $\{f_n(x)\}$ на X_0, вообще говоря, $\not\Rightarrow$ равн. сход. на X_0.

Ц примера 1: $f_n(x) = x^n$, $X_0 = (-1, 1]$

$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n - 1 = 1 - 1 = 0 & \{x = 1\} \\ |x^n| & \{|x| < 1\} \end{cases}$$

$\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0 \Rightarrow$ нет равномерной сходимости

Если $X_0' = [-\alpha, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$

$\sup\limits_{x \in X_0} |f_n(x) - f(x)| = \alpha^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow$ равн. сход. на указанном X_0'

Замечание 4 равн. сход. функц. ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на X_0 $\Leftrightarrow$ равн. сход. функц. посл. $\{S_n(x)\}$ на X_0,

где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} u(x)$

если $\{S_n(x)\} \rightrightarrows u(x)$

пол. част. сумм X

2° Критерий Коши

Теорема 1 $\{f_n(x)\} \rightrightarrows$ на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X$

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Теор 1' $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows$ на $X \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X$

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$

$\quad = |S_{n+p}(x) - S_n(x)|$

Зам 1 Теор 1' - переформулировка т. 1. С учетом опр. равн. сх-ти функц. ряда

Д-во „$\Rightarrow$". По опр. $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x\in X$

$\Rightarrow |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon$ (т.к. $n+p\geq N$) $\forall p\ \forall x\in X$

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)|$

$\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$ $\forall x\in X$, чтд

„$\Leftarrow$" $\{f_n(x)\}$ сходится $\forall x$ ($\Leftarrow$ из $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N$ $\forall p\ \forall x$. $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ (крит. Коши числ. посл))

Пусть $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \xrightarrow[p\to+\infty]{\lim} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow$ чтд.

Если в усл. теор. 1' рассм. только $p=1$

$|u_{n+1}(x)| < \varepsilon$ ← Опр. равн. сходимости посл. $u_n(x)$ на мн-ве X

Сл. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$, то $\{u_k(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} 0$

§2 Признаки равномерной сходимости

Рассм. числ. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на X

1° Признак Вейерштрасса

Теор 2. Пусть $|u_k(x)| \le a_k \ \forall k, \forall x \in X$

Кроме того, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сход.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

Замечание $|u_k(x)| \le a_k \ \forall k, \forall x \in X$ назыв мажорантным условием;

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ — мажоранта

Д-во. Т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сход $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N$

$\forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \quad + a_k \ge 0$

$\Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$, чтд.

вып. для всех $x \in X$

Пример $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = (*)$

$\ln(1+x) = \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n}_{S_n(x)} + R_{n+1}(x)$

$\forall x \in [0,1] \quad |R_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n+1}$

$(*) = \ln(1+x)$ Из оценки остатка

$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} \ln(1+x)$

$\left|(-1)\frac{x^k}{k}\right| \le \frac{1}{k}$ ← расходится

$\forall x \in [0,1]$

не $\exists$ сход. мажоранты ⇒ для него неприменим пр-к Вейерштрасса

2° Функц. посл. с равн. огр. изменением

Опр $\{f_n(x)\}$ назыв равн. огр. на X, если $\exists M > 0 \ |f_n(x)| \le M \ \forall n \ \forall x \in X$

Опр $\{f_n(x)\}$ назыв. посл. с равномерным огр. изменением, если

$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$ — сходится равномерно на X

Ув 1 Если посл. $\{f_n(x)\}$ имеет равн. огр. изм на X, то она на X равн. сход

Д-во По критерию Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \ge N \ \forall p \ \forall x \in X$

$(*) = \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$

$(*) \ge \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \right| = |f_{n+1}(x) - f_{n+p+1}(x)|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \ge N \ \forall p \ \forall x \in X$

$|f_{n+p+1}(x) - f_{n+1}(x)| < \varepsilon$ (замена $n \to n+1$), чтд

Утв 2 Если $\{f_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ и монотонна по n для каждого фикс. $x \in X$

$\Rightarrow \{f_n(x)\}$ имеет равн. огр. сумм.

Д-во Пусть $\{f_n(x)\}$ не убывает по n $\forall$ фикс. $x \in X$

$(f_{n+1}(x) \geq f_n(x)) \ \forall$ фикс. $x \in X$

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = \sum_{k=1}^{N} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) =$$

$$= f_{N+1}(x) - f_1(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) - f_1(x)_{\text{равн. сход, тк}}$$

↑ не зависит от N

Замечание Для числ. посл $\{v_n\}$ с огр. сум.:

$\{v_n\}$ сходится $\Rightarrow \{v_n\}$ ограничена

Нельзя вставить „равномерно"

Пусть $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \quad 0 < x < 1 \ (= X)$

$f_n(x) \to \frac{1}{x}$

$\sup\limits_{x \in X} \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$

$\Rightarrow f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 1/x.$

Но $f_n(x)$ не равн. равн. огр.

$\Rightarrow \{v_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} \not\exists \{v_n(x)\}$ равн. огр.

3° Признаки Абеля

Теор 3 1-ый признак Абеля

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x) v_k(x) \quad (*)$; $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$

Пусть 1) Част. суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равн. огр. на X: $|S_n(x)| \leq M \ \forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\{v_k(x)\} \to 0 \ \forall x \in X$ и $\{v_k(x)\}$ имеет равн. огр. сумм. на X

Тогда $(*)$ равн. сх. на X

Д-во По условию 2) и утв 1 (2°) $\Rightarrow$

$\{v_k(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} 0$

Тождество Абеля $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)) + S_{n+p}(x) v_{n+p}(x) - S_n(x) v_{n+1}(x)$

$S_{n+p}(x)$: M; $S_n(x)$: M; $S_k(x)$: M

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ по усл. $\exists M > 0 \ |S_n(x)| \leq M \ \forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow \exists N \ \forall n \geq N \quad |v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \ \forall x \in X$

$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)\right| \underset{\text{нер-во}}{\leq} M \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| +$ (32)

$+ M|v_{n+p}(x)| + M|v_{n+1}(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$, что

Теор 4 (следствие) (признак Дирихле-Абеля)

Пусть

1) $\{S_n(x)\}$ равн. огр. на X

2) $\{v_k(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} 0$; $\{v_k(x)\}$ монотонна по k фикс $x \in X$

Тогда (*) равн. сх на X

Д-во: из усл 2) и утв. 2 (2°)
$\Rightarrow$ $\{v_k(x)\}$ имеет равн. огр. изм. $\forall x \in X$
$\Rightarrow$ теорема 3, чтд.

Теор 5 (2-ой признак Абеля)

1) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$

2) $\{v_k(x)\}$ имеет равн. огр. изм на X
$\{v_k(x)\}$ равн. огр. на X

Тогда (*) равн. сходится на X

Д-во $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}$:

$\hat{S}_{n_1}(x) = \left| \sum\limits_{k=N}^{n_1} u_k(x) \right| < \varepsilon$ (част. сумма начиная с нек. N)

по крит. Коши $\forall x \in X$ $\forall n_1 \geq N$

Гонд. Абеля.

сумма из модулей сходится

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \hat{S}_k(x) (v_k(x) - v_{k+1}(x)) + \hat{S}_{n+p}(x) v_{n+p}(x) - \hat{S}_k(x) v_{n+1}(x)$$

$k \geq N$ $\quad S_k(x) - S_{k-1}(x) = \hat{S}_k(x) - \hat{S}_{k-1}(x)$ с учетом $\forall k \geq N$

$\hat{S}_k(x) \leq \varepsilon$, $\hat{S}_{n+p}(x) \leq \varepsilon$, $\hat{S}_k(x) \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \geq N : \forall n \geq N_1$:

$|v_{n+p}(x)| \leq M$, $|v_{n+1}(x)| \leq M$ $\forall x \in X$

$\sum\limits_{k=1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \leq M$ $\forall x \in X$ из равн. огр. изм

$\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \overset{\text{нер-во } \Delta}{\leq} \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot M = 3\varepsilon M = \varepsilon_1$

Теорема 6 (признак Абеля)

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x) v_k(x)$ (*)

Пусть: 1) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$

2) $\{v_k(x)\}$ равн. огр. на X и монотонна при любом фикс. $x \in X$

Тогда: (*) сход. равн. на X

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \hat{S}_k(x) (v_k(x) - v_{k+1}(x)) + \hat{S}_{n+p}(x) v_{n+p}(x) - \hat{S}_n(x) v_{n+1}(x) \quad \forall n \geq N$$

$\hat{S}_n(x) = \sum\limits_{k=N}^{n} u_k(x)$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N$ $\forall x \in X$ $|\hat{S}_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$

где $M > 0$: $|v_k(x)| \leq M$ $\forall x \in X$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |\hat{S}_k(x)|\,|v_k(x)-v_{k+1}(x)|$$

$$+ |\hat{S}_{n+p}(x)|\,|v_{n+p}(x)| + |\hat{S}_n(x)|\,|v_{n+1}(x)| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3M}\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(v_k(x)-v_{k+1}(x)) + \frac{\varepsilon}{3M}M + \frac{\varepsilon}{3M}M = \varepsilon$$

{в силу $v_k(x)$ — монотонности} (не возрастает)

$$= \frac{\varepsilon}{3M}\underbrace{(v_n(x)-v_{n+p}(x))}_{\le 2M} + \frac{2\varepsilon}{3} \le \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3} = \frac{4\varepsilon}{3}$$

Пример $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ (*) сходится при всех x

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(nx)\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \quad \forall x \ne 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

(при этих знач. ряд $\to 0$)

$\frac{1}{n}\downarrow 0$

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(nx)\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \le \max\left(\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}, \frac{1}{\sin\frac{b}{2}}\right)$$

$x\in(0, 2\pi)$ — 0 [a — b] 2π

$v_n(x) = \frac{1}{n}\downarrow 0$

$\Rightarrow$ по признаку Дирихле-Абеля (*) сход. на $[a, b]$ (где $(a, b) = (0, 2\pi)$) но ряд не явл. равн. сход.)

4° Признак Дини

Теорема 7 Пусть $\{f_n(x)\} \to f(x)$ $\forall x\in X$, при этом

1) X — компактно (огр., замкн.) ← содержит все свои предельные т.
2) $\{f_n(x)\}$ монотонна $\forall$ фикс. x
3) $f_n(x)\in C[X]$ $\forall n$, $f(x)\in C[X]$

$\Rightarrow f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$

Д-во Пусть $\{f_n(x)\}$ неубыв. $\forall$ фикс. $x\in X$

$r_n(x) = f(x) - f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ $\forall x\in X$ (не возр.) т.к. ($f_n(x)\uparrow$)

$\Rightarrow r_n(x) \ge 0$

3) $\Rightarrow r_n(x)\in C[X]$

Требуемое утв. т.е. $\exists$ r тому, что

$r_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$

Пусть $r_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} 0$

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\ge N\ \exists x_n\in X:$

$r_n(x_n) \ge \varepsilon_0$

Рассм. мн-во $\{x_n\}\subset X$ (огр., замкн.)

$\Rightarrow \{x_n\}$ огр. $\Rightarrow$ (Больц.-Вейерш.) $\exists \{x_{n_k}\}$ сходится к $x_0 \in X$

$\forall m \in \mathbb{N}$: рассм. $r_m(x)$: $r_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0$

$\exists\, n_k \geq m$: $r_{n_k}(x_{n_k}) \leq r_m(x_{n_k})$ {монотонность}

Это нер-во выполнено ~~для~~ $r_{n_{k+i}}(x_{n_{k+i}}) \leq$

$\leq r_m(x_{n_{k+i}})$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $(n_{k+1} > n_k)$

Таким образом нер-во $r_{n_k}(x_{n_k}) \leq r_m(x_{n_k})$ выполнено $\forall n_k \geq m$

т.к. $r_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0 \Rightarrow r_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0$

$\forall n_k \geq m$

Устремим $k \to +\infty$ при каждом фикс. m.

$$\varepsilon_0 \leq r_{n_k}(x_{n_k}) \leq r_m(x_{n_k})$$

$k \to +\infty$: $\varepsilon_0 \leq \ldots \leq r_m(x_0)$

$\Rightarrow r_m(x_0) \geq \varepsilon_0$ $\forall m$ но $r_m(x_0) \to 0$

$\Rightarrow \varnothing$, чтд

Теорема 7' (Признак Дини для функц. ряда)

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ $\forall x \in X$, и выполнены:

1) X – компакт
2) $\{S_n(x)\}$ монотонна ($\Rightarrow u_n(x) \geq 0$ „↑" $\forall n \in \mathbb{N}$, (≤ 0) „↓" $\forall x \in X$
3) $u_n(x), S(x) \in C[X]$

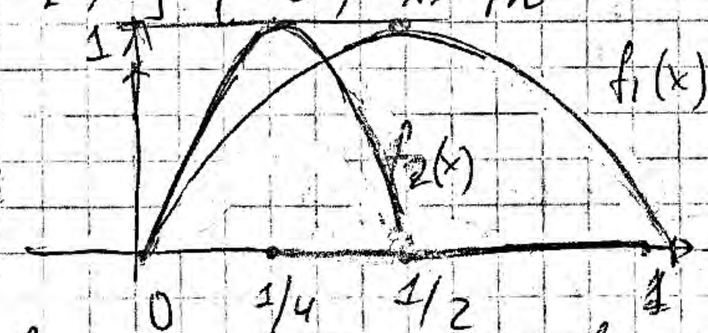
$\Rightarrow$ ряд сходится равномерно на X

Замечание (убираем по одному условию)

I) Без усл. (2) утв. т-э неверно

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi n x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x > 1/n \end{cases}$$

$X = [0,1]$



все усл., кроме (2) выполнены

$X = 0{,}01$

$\forall x > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = 0$ $\forall n \geq N$

$f_n(x) \to 0 = f(x)$

Монотонности нет: посл. снач. ↑, потом ↓, потом 0.

Покажем, что сходимость неравномерная.

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \nearrow \text{ч.т.д.}$$

$$\sup_{0\le x\le 1} |f_n(x)| = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$$

II) Рассм. $f_n(x) = x^n,\ x \ge 0$

При $X = 0\le x\le 1$ — $f_n(x)$ сходится

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & 0\le x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

Монотонна $\forall$ фикс. $x \in X$ $(\downarrow)$

$$\sup_{0\le x\le 1} |f_n(x) - f(x)| = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$$

x^n монот.

Не выполняется: $f(x) \in C(X)$

III) Рассм. $f_n(x) = x^n \quad 0\le x<1$.

Не выполняется: ~~ко~~ 1)

Но $\sup = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

IV)

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0\le x<1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Не выполняется: $f_n \in C(X)$

Но $\sup = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

§3 Функциональные св-ва функц. посл. и рядов

$\{f_n(x)\}$ — св-ва? — $f(x)$; $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ — св-ва? — $S(x)$

1° Переход к пределу. Непрерывность

$X \subset \mathbb{R},\ \forall a \in X$. a — пред. т. для X.

Теорема 8 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ — равн. сход. на X

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$$

$\forall n\ \exists \lim_{x\to a} u_n(x) = b_n$. Тогда:

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сход. и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \lim_{x\to a} S(x)$

$$\left\{ \lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to a} u_n(x) \right\}$$

Д-во ($\Rightarrow$)

Критерий Коши равн. сход.

$\forall \varepsilon>0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \ge N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X:$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \quad : x \to a$$

↑ конечная сумма

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \varepsilon \underset{x\to a}{\Rightarrow} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| \le \varepsilon$$

$\Rightarrow$ числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ сходится

$$S(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} u_k(x)}_{\forall N \in \mathbb{N}} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(x) -$$

{маленькие} {остаток ряда}

$$-\sum_{k=1}^{N} b_k - \sum_{k=N+1}^{+\infty} b_k = (*)$$

{маленькие} {остаток ряда}

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N \ \forall x \in X$

$$\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$(*) = \sum_{k=1}^{N}(u_k(x) - b_k) - \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=N+1}^{+\infty} b_k = (*)$$

$\exists \delta > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |u_k(x) - b_k| < \frac{\varepsilon}{3N} \quad \forall k = 1 \ldots n$

$$(*) \le N \cdot \frac{\varepsilon}{3N} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|S(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

след. в-т ГМ
след. ср. матан
+ след. в-т ГМ
+ след. ср. матан

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad x \in (0, 2\pi) = X$ сход. неравномерно.

$x_0 = 0$ – пред. т. X

$\forall n \ \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos nx}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ если ряд сх. равн,

то $\exists \lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расх. $\Rightarrow \emptyset$

<u>Следствие 1</u> $x_0 \in X$, x_0 – пред. т. X, $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$,

$\forall n$ f_n непр. в т. x_0. Тогда f непр. в т. x_0

<u>Д-во</u> $\exists \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x \in X}} f_n(x) = f_n(x_0) \Rightarrow$ по т. о пред. переходе $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ непр. в т. } x_0$$

<u>Следствие 1'</u> $x_0 \in X$, x_0 – пред. т. X,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сх. равн. к $S(x)$ на X, $u_n(x)$ непр.

в т. x_0, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow S(x)$ непр. в т. x_0

<u>Следствие 2</u> Пусть X плотно в себе (каждая т. явл. предельной)

$f_n \in C(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C(X)$

Следствие 2. X плотно в себе,

$u_n \in C(X)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сх. равн. к $S(x)$ на X

$\Rightarrow S \in C(X)$

Опр f диф. на $[a,b]$, если $\forall x \in (a,b)$

$\exists f'(x)$, $\exists f'(a+)$, $f'(b-)$

Далее будем писать $f'(x)$ $\forall x \in [a,b]$, на концах подразумеваются односторонние производные.

Теорема о почленном диф. функц. посл.

Пусть $\{f_n(x)\}$, $\forall n$ f_n диф. на $[a,b]$,

$\{f_n'(x)\} \overset{[a,b]}{\Rightarrow}$, $\{f_n(x)\}$ сход. хотя бы в

1 т. $[a,b]$

Тогда

1) $\{f_n(x)\}$ сх. равн. на $[a,b]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

2) f диф. на $[a,b]$, $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$

$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$

Д-во 1) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1(\varepsilon)$ $\forall n \geq N_1(\varepsilon)$ $\forall p \in \mathbb{N}$

$\forall x \in [a,b]$ $|f_n'(x) - f_{n+p}'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

2) $\exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $|f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Возьмем $N = \max(N_1, N_2)$, $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$

$\varphi(x) = f_n(x) - f_{n+p}(x)$ – диф-мы на $[a,b]$

$\varphi(x) - \varphi(x_0) \underset{\{\text{т. Лагранжа}\}}{=} \varphi'(\xi_x)(x - x_0)$, ξ_x между x и x_0

$\Rightarrow |\varphi(x)| \leq |\varphi(x_0)| + |\varphi'(\xi_x)||x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} +$

$+ \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ выполнен критерий Коши равн. сход. посл. $\{f_n(x)\}$ на $[a,b]$

2) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ $\forall x \in [a,b]$, x – фикс.

$\exists f_n'(x) = \lim\limits_{\substack{t\to x \\ t\in[a,b]}} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$

$\forall t \in [a,b] \setminus x$ $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$

Если мы покажем, что $\frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$ сход. равн. на мн-ве $M = [a,b] \setminus x$, x – пред. т. M

$\Rightarrow$ по т. о пред. переходе

$\exists \lim\limits_{\substack{t\to x \\ t\in M}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$

т.е. $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$

кр. Коши равн. сход. $\{f_n'\}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall t\in X[a,b]$

$|f_{n+p}'(t) - f_n'(t)| < \varepsilon$

$$\left|\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x} - \frac{f_{n+p}(t)+f_{n+p}(x)}{t-x}\right| =$$

$$= \frac{1}{|t-x|}\,|f_n(t)-f_{n+p}(t) - (f_n(x)-f_{n+p}(x))| =$$

$$= \frac{1}{|t-x|}\,|\varphi(t)-\varphi(x)| = \frac{1}{|t-x|}\,|\varphi'(\xi_t)|\,|t-x| =$$

(↑ т. Лагранжа)

$$= |\varphi'(\xi_t)| < \varepsilon, \text{ что}$$

Теор. 1 (почл. дифф. функц. ряда)

Пусть $\forall n$ $u_n(x)$ диф-ма на $[a,b]$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сход. равн. на $[a,b]$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сход. хотя бы в 1 т. $\in[a,b]$

Тогда: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сх. равн. на $[a,b]$

2) $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, $x\in[a,b]$

Следствие Пусть $\forall n\in\mathbb{N}$ f_n имеет первообразную на $[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$. Тогда

f имеет первообразную на $[a,b]$.

Более того, если Φ_n – первообр. f_n

$\Phi_n(x_0)=0$ в нек. $x_0\in[a,b]$, то

$\Phi_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \Phi$ – первообр. f

Д-во $\{\Phi_n(x)\}$ сх. в т. $x_0\in[a,b]$

$\{\Phi_n'(x)\} = \{f_n(x)\} \overset{[a,b]}{\longrightarrow}$ ⇒ по т. о почл. дифф.

$\Phi_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \Phi$ ← диф-ма и

$\Phi'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_n'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, что.

Для рядов аналогично.

Почленная интегрируемость почл. и рядов

Пример Проинтегрируем на рац. числа $[0,1]$

$\{r_n\} = \mathbb{Q}\cap[0,1]$

$$u_n(x) = \begin{cases} 1, & x=r_n \\ 0, & x\neq r_n \end{cases} \qquad \forall n \int\limits_0^1 u_n(x)\,dx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} 1, & x\text{-рац} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$ ← ф-ция Дирихле, не интегрируема.

Теорема о почленном интегрир. ~~дифф~~ функц. посл.

Пусть $\forall n\ f_n \in R[a,b]$ (интегрируема), $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$. Тогда

1) $f \in R[a,b]$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

(или же $\int_a^b \lim\limits_{\lambda\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$)

Д-во 1) Покажем, что a) f огр. на $[a,b]$

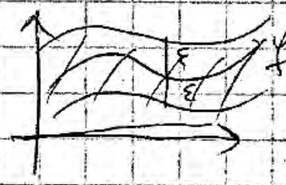
б) $\forall \varepsilon>0\ \exists$ τ-разб. $[a,b]$: $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$

(Сумма Дарбу, критерий интегрируемости)

$\varepsilon = 1\ \exists N: |f(x) - f_N(x)| < 1,\ x\in[a,b]$

$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |f_N(x)| \le 1 + M \Rightarrow f$ огр.

$f_N \in R[a,b] \Rightarrow$ огр. $\Rightarrow \exists M: |f_N(x)| \le M,\ x\in[a,b]$



$f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_1:$

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)},\ x\in[a,b]$

$n \ge N_1$

Зафикс. $n = N_1$ $\forall \tau$ (разбиение)

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$

$M_j = \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f \qquad M_j' = \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f_n, \qquad m_j = \inf\limits_{[x_{j-1},x_j]} f$

$m_j' = \inf\limits_{[x_{j-1},x_j]} f$

$S_\tau(f) = \sum_{j=1}^{k} M_j \Delta x_j \qquad S_\tau(f_n) = \sum_{j=1}^{k} M_j' \Delta x_j$

$s_\tau(f) = \sum_{j=1}^{k} m_j \Delta x_j \qquad s_\tau(f_n) = \sum_{j=1}^{k} m_j' \Delta x_j$

$\forall [x_{j-1}, x_j] \ni x$

$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$m_j' \qquad\qquad M_j'$

$\Leftrightarrow\ m_j' - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < M_j' + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$\Rightarrow \begin{cases} M_j \le M_j' + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \\ m_j \ge m_j' - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \end{cases}$

$\Rightarrow\ \boxed{M_j - m_j \le M_j' - m_j' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ (40)

$$S'_T(f) - s_T(f) = \sum_{j=1}^{k} (M_j - m_j)\Delta x_j \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{k} \left(M_j' - m_j' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\Delta x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (M_j' - m_j')\Delta x_j + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{k} \Delta x_j <$$

(где $\sum \Delta x_j = (b-a)$)

$$\le S'_T(f_n) - s_T(f_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$< \varepsilon/2$, т.к. интегр. $\Rightarrow \exists$ такое разбиение

Т.к. $f_n \in R[a,b] \Rightarrow \exists T:\ S'_T(f_n) - s_T(f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

Возьмём $t = T$, получим требуемое

$$S'_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow f \in R[a,b]$$

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon):\ \forall n \ge N\ \forall x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ч.т.д.

<u>Т. о почл. инт. функц. ряда</u>. Пусть $u_n \in R[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$. Тогда:

1) $S(x) \in R[a,b]$

2) $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)dx$

$$\left(\text{т.е. } \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)dx\right)$$

<u>Сх-ть в среднем</u>

<u>Опр</u> $\{f_n\}$, $f \in R[a,b]$. Тогда $\{f_n\}$ сходится в среднем на $[a,b]$ к функц. $f(x)$, если

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0$$

<u>Ув 1</u> Если $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, $f_n \in R[a,b]$, то $\{f_n(x)\}$ сх. в среднем

<u>Д-во</u>: $f \in R[a,b]$, то по т.о. пред. интегр-ти $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \ge N\ \forall x \in [a,b]$

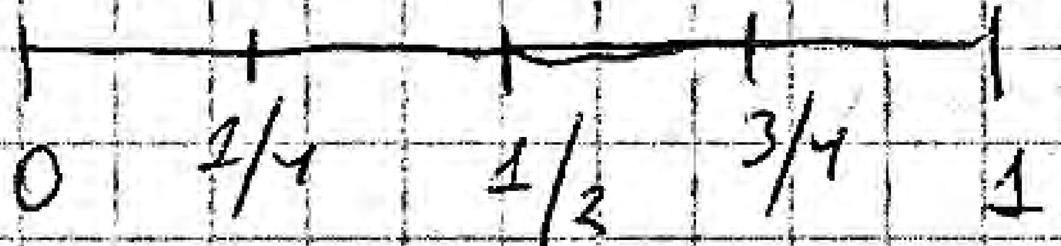
$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$$

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

Замечание: Из сх-ти в ср $\not\Rightarrow$ сх-ть хотя бы в 1 т. отр. $[a,b]$

Пр-р $I_1=[0,1]$ 1 часть

$I_2=[0,1/2]$, $I_3=[1/2,1]$ } 2 части



$I_4=[0,1/4]$ ... $I_7=[3/4,1]$ 4 части

$I_{2^{n-1}} = \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$ ... $I_{2^n-1} = \left[1-\frac{1}{2^{n-1}}, 1\right]$

2^{n-1} частей

$\cup$ на каждом шаге дает отр. $[0,1]$

$\forall N \ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \ n_1, n_2 > N$

$\forall x \in [0,1]$ $\quad | \ x \in I_{n_1}, \ x \notin I_{n_2}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_n \\ 0, & x \in [0,1] \setminus I_n \end{cases}$$

$\forall x \in [0,1]$ $\{f_n(x)\}$ расходится

$f(x) \equiv 0$. Покажем, что сход. в ср.

$$\int_0^1 (f_n(x)-f(x))^2 dx = \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = |I_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

($|I_n|$ — длина I_n)

$\Rightarrow \{f_n(x)\}$ сх. в ср к 0 на $[0,1]$

Нер-во Коши-Буняковского

$\varphi, \psi \in R[a,b] \Rightarrow$

$$\left| \int_a^b \psi(x)\varphi(x)\,dx \right| \le \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx}$$

Д-во: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_a^b (\lambda\varphi(x)+\psi(x))^2 dx \geq 0$

$$\lambda^2 \int_a^b \varphi^2(x)\,dx + 2\lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(x) + \int_a^b \psi^2(x)\,dx \geq 0$$

$$4\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\right)^2 - 4\int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx \le 0$$

Утв 2 Если $\{f_n(x)\}$ сх в ср. к $f(x)$ на $[a,b] \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Д-во Нужно д-ть $\displaystyle\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,dx =$

$$= \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\left| \int_a^b (f_n(x)-f(x))\,dx \right| \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx$$

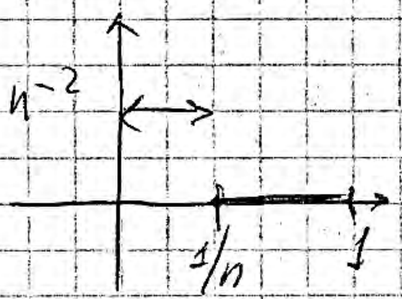
$$\overset{К-Б}{\le} \{\varphi = |f_n(x)-f(x)|, \ \psi = 1\} \le$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2 dx \int_a^b dx} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2 dx}_{\to 0 \text{ (ну сх в ср.)}} \underbrace{(b-a)}_{\text{const}}} \to 0, \quad n \to +\infty$$

Пример 2

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n^\alpha, & x \in (0, 1/n) \\ 0, & x \in [0,1] \setminus (0, 1/n) \end{cases}$$



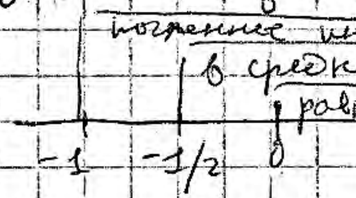
$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in [0,1]$

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

$\sup\limits_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n \to +\infty}{=} 0$ при $\alpha > 0$

$$\int_0^1 (f_n(x)-f(x))^2 dx = \int_0^{1/n} \frac{1}{n^{2\alpha}} dx = \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \underset{\alpha > -1/2}{\to} 0, \quad n \to +\infty$$

$$\int_0^{1/n} f_n(x) dx = \int_0^{1/n} \frac{1}{n^2} dx = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \underset{\alpha > -1}{\to} 0 = \int_0^1 f(x) dx, \quad n \to +\infty$$



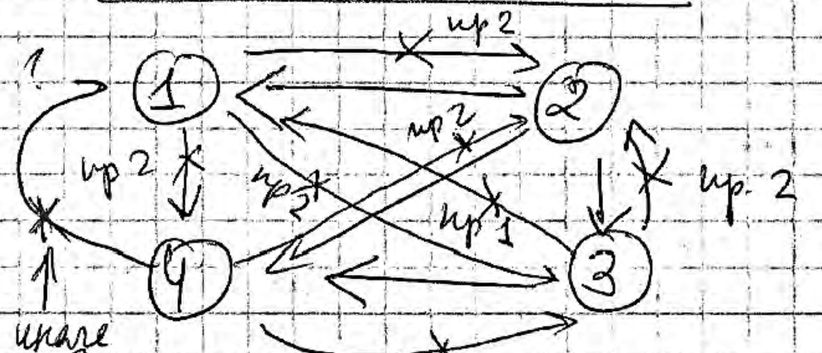
$\{f_n\}, f \in R[a,b]$ | $\forall x \in [a,b]\ f_n(x) \to f(x)$ ① поточечная сх-ть

$f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ ② равн. сх

$\{f_n\}$ сх. в среднем ③ к $f(x)$ на $[a,b]$

Почленное интегр. ④

$$\int_0^1 f_n(x) dx \to \int_0^1 f(x) dx$$



Необх усл сх-ти в ср.

Если $\{f_n(x)\}$ сх в ср. на $[a,b]$, то $\{\int_a^b |f_n(x)| dx\}$ ограничена

Д-во Пусть $\{f_n\}$ сх. в ср к f

$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$ (13)

$$\int_a^b |f_n(x)| dx \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx + \int_a^b |f(x)| dx \leq$$

К-Б $\leq \sqrt{\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2 dx}\,\sqrt{b-a} + \int_a^b |f(x)|\,dx$ — посл. огр.,

(первое слагаемое) $\to 0,\ n\to\infty$, огр.; $\int_a^b |f(x)|\,dx$ — const, т.д.

[illegible]

Т. Больцано-Вейерштрасса

$\{a_n\}$ - огр $\Rightarrow \exists \{a_{n_k}\}$ - сход.

? $\{f_n(x)\}$ - равн. огр $\Rightarrow$? $\{f_{n_k}(x)\}$ сх. равн.

~~Если разрыв~~

Вообще говоря, нет. Напр. $\{x^n\}$ $[0,1]$

$\lim_{n\to+\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x\in[0,1) \end{cases}$ - разрывна

$\Rightarrow$ посл-ть сход. неравномерно

$\forall n_k \to \infty$ $x^{n_k} \to f(x)$ - разр $\Rightarrow \{x^{n_k}\}$ сх. неравн.

Опр. $\{f_n(x)\}$ наз. равностепенно непр. на $[a,b]$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$

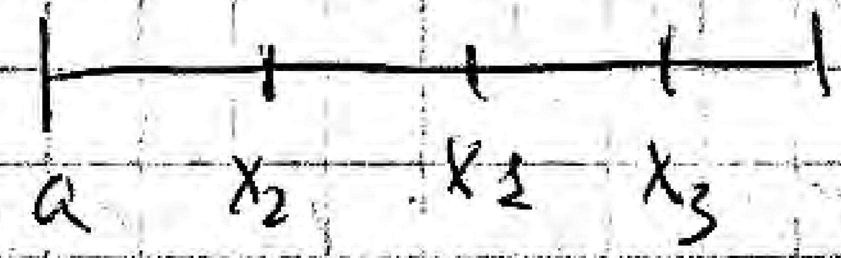
$\forall x', x'' \in [a,b],\ \rho(x',x'')<\delta\ \forall n\in\mathbb{N}$

$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$

Т. Арцела. Пусть $\{f_n(x)\}$ равн. огр. и равностеп. непр. на $[a,b]$. Тогда из неё можно выд. равн. сход. подпосл. $f_{n_k}(x) \to f(x)$

Д-во: 1) Пусть $\{x_n\} \subset [a,b]$: $\forall \delta>0$ $\exists N(\delta)$: $\forall x\in[a,b]$

$\exists j \in \{1,\ldots,N\}$: $|x-x_j|<\delta$



$x_1 = \frac{a+b}{2}$

$x_4, \ldots, x_7$ $\quad 8 = 2^3$ частей

n-ый шаг $x_{2^{n-1}} \ldots x_{2^n-1}$

δ: $\frac{a-b}{2^n} < \delta \Rightarrow N = 2^k - 1$ точки $x_1, \ldots x_N$

делят $[a,b]$ на 2^N част. длины $<\delta$

2) Строим $\{f_{n_k}\}$ сх. в мод x_j

x_1: $\{f_n(x_1)\}$ огр посл $\Rightarrow \exists f_{1n}(x_1)$ - сход.

x_2: $\{f_{1n}(x_2)\}$ огр посл $\Rightarrow \exists f_{2n}(x_2)$ - сход

и т.д.

$f_{11}(x)$ $\quad f_{12}(x)$ $\ldots$ $\quad f_{1n}(x) \ldots$ сх в x_1

$f_{21}(x)$ $\quad f_{22}(x)$ $\quad f_{2n}(x)$ сх в x_2

$\vdots$

$f_{n1}(x)$ — — $f_{nn}(x) \ldots$ сх в $x_1, \ldots, x_n$

Диаг. подпосл. — подпосл. любой построчной посл.

$\{f_{k_k}(x)\}$ — диаг. сх. $\forall x_j,\ j \in \mathbb{N}$

3) $\{f_{k_k}(x)\} \overset{def}{=} g_k(x) \Rightarrow \{g_k(x)\}$

Покажем, что подпосл. $\{g_k(x)\}$ сх. равн. на $[a,b]$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x', x'' \in [a,b] : |x'-x''|<\delta$

$\forall k\ |g_k(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\exists N\ \forall x \in [a,b]\ \exists x_j,\ j \in \{1,..,N\}\ |x-x_j|<\delta$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\quad |g_n(x) - g_{n+p}(x)| \le$

$\le |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_{n+p}(x_j)| +$

$\forall x \rightsquigarrow x_j$ подбираем $\overset{\wedge}{\varepsilon/3}$ $+ |g_{n+p}(x_j) - g_{n+p}(x)| <$ $\overset{\wedge}{\varepsilon/3}$

(равностеп. непр.)

$< \frac{2\varepsilon}{3} + |g_n(x_j) - g_{n+p}(x_j)|$ (*)

Критерий Коши сх $\{g_n(x_j)\}$ $j = \overline{1,N}$

$\exists \tilde{N}_j : \forall n \ge \tilde{N}_j\ \forall p \in \mathbb{N}\ |g_n(x_j) - g_{n+p}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$

конечное число j

Выбираем $\tilde{N} = \max(\tilde{N}_1, .., \tilde{N}_N) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \ge \tilde{N}\ \forall j \in \{1,..,N\}$

$\Rightarrow$ (*) $< \varepsilon\ \forall n \ge \tilde{N}$

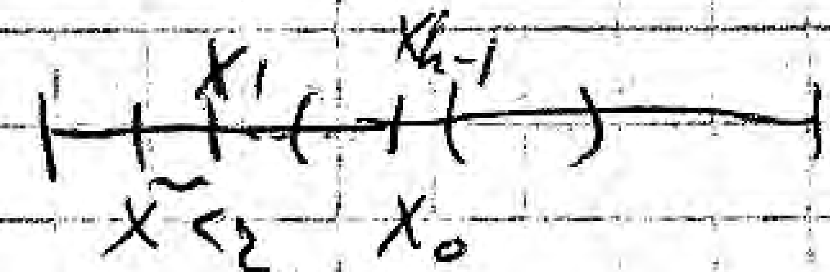
$\forall \varepsilon>0\ \exists \tilde{N}(\varepsilon)\ \forall n \ge \tilde{N}\ \forall p \in \mathbb{N}$

$\forall x \in [a,b]\ |g_n(x) - g_{n+p}(x)| < \varepsilon$

Замечание: Если $\{f_n(x)\}$ равност. непр. на $[a,b]$ и, кроме того, огр. хотя бы в 1 т. $[a,b] \Rightarrow \{f_n(x)\}$ равн. огр.

Д-во $\varepsilon=1\ \exists \delta : \forall x', x'' \in [a,b],\ \rho(x',x'')<\delta$

$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon = 1$



$k : |b-a|/k < \delta$

$\forall x \in [a,b]$ делим на k од. частей точками

$x_1, .., x_{k-1}$

$|f_n(x) - f_n(x_0)| \le |f_n(x) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + ... + |f_n(x_{k-1}) - f_n(x_0)|$ (каждое слагаемое <1)

$< k$

$\Rightarrow |f_n(x)| < k + |f_n(x_0)|\ \forall n$, $|f_n(x_0)| \le M\ \forall n$

$\Rightarrow |f_n(x)| \le M + k$

(45)

Для проверки св-ва равностепенной непр исп. след. св-во:

Лемма: Если $f(x)$ дифф. на $[a,b]$ и посл. их произв. $\{f_n'(x)\}$ равн. огр. на $[a,b]$ то $\{f_n(x)\}$ равностеп. непр. на $[a,b]$

$|f_n'(x)| \le M\ \forall x \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}$

Д-во $f_n(x') - f_n(x'') \overset{\text{т.Лагр.}}{=} f_n'(\xi)(x'-x'')$

ξ между x' и x'' (зависит от n)

$\Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| \le M \cdot |x'-x''| < M\delta = \varepsilon$

равностеп. непр

§4. Степенные ряды

Понятие степенного ряда и обл. его сход.

① Опр. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ – функц. ряд (*)

$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – числовые члены, коэф. степ. ряда

Степ. ряд всегда сход. при $x=0$

сложно расс. также общие степ. ряды

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Расс. чис-ло:

$\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ огр. снизу 0

Ограничено ли сверху?

Если да, то $L \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Если нет, то $L = \infty$

Теорема (Коши, Адамар)

I Если $L=\infty$, то ряд (*) сход. только при $x=0$

II Если $L \in (0, +\infty)$ то (*) сход. абс при $x: |x| < 1/L$ и расходится при $x: |x| > 1/L$

При $= 1/L$ не ясно

III Если $L=0$, то (*) сход. абс. при всех $x \in \mathbb{R}$

Д-во: ① Расм. $|a_n x^n| = |a_n| |x|^n$

$\sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x|$

неогр. фикс.

Если $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ неогр. то нер-во $\sqrt[n]{|a_n|} \ge \frac{1}{|x|}$ верно для $x \ne 0$

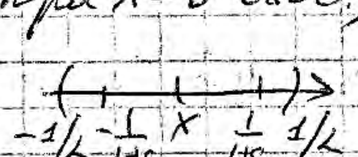
бесконечного числа значений $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} \ge 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| |x|^n \ne 0$

$\Rightarrow$ не вып. необх. усл. сх. ряда

$\Rightarrow$ ряд расх при $x \ne 0$ (при $x=0$ сход.)

② Расм. фикс. x $|x| < 1/L$



Введём такое $\varepsilon > 0$:

$|x| < \frac{1}{L+\varepsilon}$

$L = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

Правее $L+\varepsilon/2$ конечное число членов

⇒ $\sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon/2$ будет вып. начиная с нек. номера $n \geq n_0$

Т.о. для $\forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| < \frac{L+\varepsilon/2}{L+\varepsilon} < 1$

⇒ (*) сход. по признаку Коши.

Рассм. $\forall x$ $|x| > \frac{1}{L}$ ($-1/2$ … 0 … $1/2$) x $1/2-\varepsilon$

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $|x| > \frac{1}{L-\varepsilon}$

Т.к. L — пред. т., то нер-во

$\sqrt[n]{|a_n|} > L - \varepsilon$ вып. для беск. числа чл. $n \in \mathbb{N}$

$\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| > \frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon} = 1$ ⇒ не вып. необх. усл. сх-ти ⇒ ряд (*) расх.

(III) $L = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. рассм. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N$ $\sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon$ ← возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2|x|}$

⇒ $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| < \frac{1}{2} < 1$

⇒ по признаку Коши ряд (*) сходится

Зам: Если (*) сход. не только при $x=0$, то либо его обл. сх. — это вся числовая ось (случ. III), либо его обл. сх. содержит интервал $(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$, причём границы этого инт. нельзя увеличить

Поэтому $R = 1/L$ (II), $R = \infty$ (III) назыв. радиусом сход. степ. ряда

и $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$ Ф-ла Коши-Адамара сход. ряда

Зам. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $(-1, 1)$, $R=1$

При $x = \pm 1$ — расх. ряд.

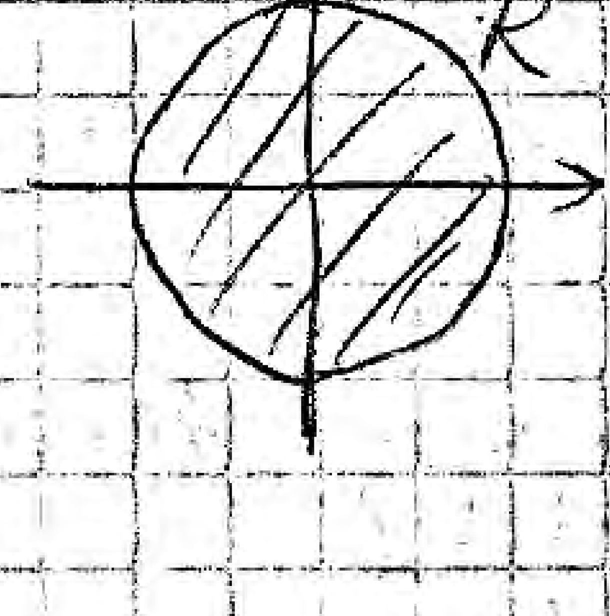
2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $(-1, 1)$, $R=1$ $x=1$ — расх.
$x=-1$ — сх.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $(-1, 1)$ $R=1$ $x=\pm 1$ — сход

Зам. Рассм. так же степ. ряды с компл. коэф. $a_n \in \mathbb{C}$, изучают вопрос о сходимости при $z \in \mathbb{C}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

В этом случае: $R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ ⇝ $z: |z| < R$



2° Функц. св-ва степ. рядов

$f(x) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ — определена на $-R<x<R$ $(R>0)$ (*)

у $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$ такой же радиус сходимости.

Лемма 1 Пусть $R>0$ — радиус сходимости ряда и $r>0$: $r<R$. Тогда степенной ряд (*) равномерно сходится на мн-ве $[-r, r]$

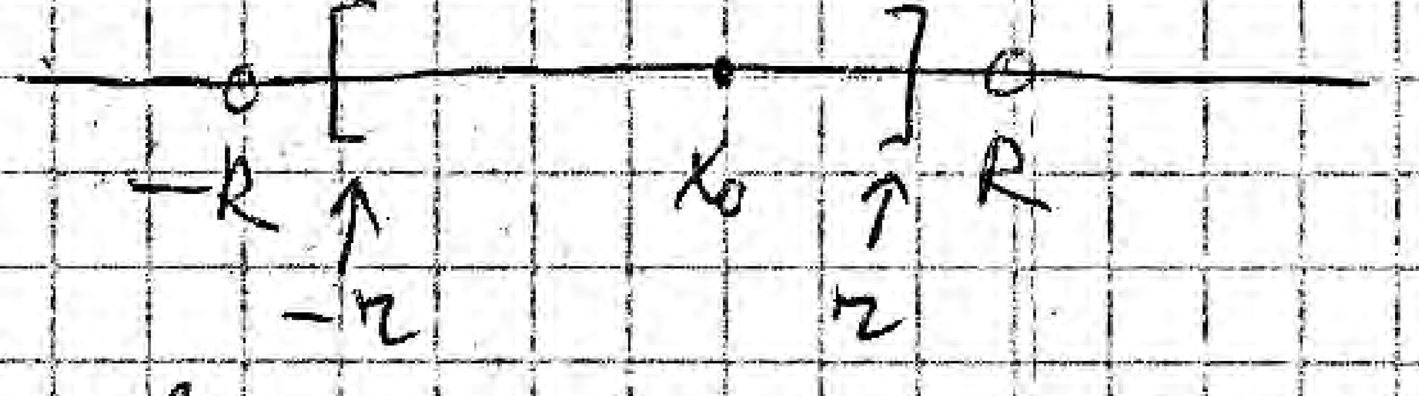
Д-во: $|a_n x^n| \le |a_n| r^n$

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| |x^n|$ сход. равн. на $[-r, r]$

Теорема 2 Сумма степенного ряда явл. непр. на $(-R, R)$ функцией.

Д-во: Непр. на мн-ве $(-R, R) \Leftrightarrow$ непр. в каждой т. $x_0 \in (-R, R)$



Рассм. $r<R$: $x_0 \in (-r, r)$

Согласно Лемме 1 ряд (*) сход. равн. на $[-r, r]$

$f(x)$ непр. на $[-r, r] \Rightarrow$ и $\forall$ т. x_0, ч.т.д.

Теорема 3 Степенной ряд (*) можно почленно интегрировать на $[0, x]$, причём получающийся ряд степ. ряд имеет тот же радиус сходимости

Д-во. Ряд (*) равн. сход. на $\forall$ $[0, r]$ где $0<r<R$.

$\Rightarrow$ Возможно почленное интегрирование

$$\int_0^r f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^r a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^r x^n dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{r^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m-1}}{m} r^m$$

$$\tilde{a}_m = \frac{a_{m-1}}{m}$$

$$L \overset{def}{=} \lim \sqrt[n]{|\tilde{a}_m|} = \lim \sqrt[m]{\frac{|a_{m-1}|}{m}} = \lim \sqrt[m]{|a_{m-1}|} =$$

$$= \lim \left(\sqrt[m-1]{|a_{m-1}|}\right)^{\frac{m-1}{m}} = L$$

(где $\sqrt[m-1]{|a_{m-1}|} \to L$, $\frac{m-1}{m} \to 1$)

Теорема 4 Сумма степ. ряда (*) явл. функц. дифф-ой на $(-R, R)$; степ. ряд (*) допускает почленное дифф., причём получающийся степ. ряд имеет тот же радиус сход.

Д-во. $\sum u_n(x)$: $\sum u_n(x_0)$ сх, $\sum u_n'(x)$ — равн. сход.

Рассм. $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$ (**)

$$\lambda = \lim \sqrt[n]{|(a_{n+1})/a_{n+1}|} = \lim \sqrt[n]{|a_{n+1}|} =$$

$$= \lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

$\sqrt[n]{a_n} \to 1 \Rightarrow$ (**) имеет тот же радиус сходимости.

Дифф-ть $S'(x)$ на $(-R, R) \Leftrightarrow$ дифф-ть в $\forall x_0 \in (-R, R)$

на $[-r, r]$ сход ряд (**) и сход ряд (*) сход равн.

$\Rightarrow$ возможно почленное дифф-ие $S'(x)$ дифф-ма на $[-r, r]$

Следствие 1.4 Сумма степ. ряда бесконечно дифф-ма функция т.е. ряд (*) можно почленно дифф-ть сколь угодно много раз.

$S'(x) \in C^\infty(-R, R)$

$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

3° Разложение ф-ции в степенной ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv S'(x)$, радиус сходимости $0 < R \le +\infty$

$\Rightarrow S'(x) \in C^\infty(-R, R)$

Теор. 1 Если ф-ция $y = f(x)$ разложима в степенной ряд в обл. $(-R, R)$, то $f(x) \in C^\infty(-R, R)$ [Необходимое условие]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$f(0) = a_0$ (договорились)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}, \quad f'(0) = a_1 \cdot 1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}, \quad f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$$

$$f^{(n)}(0) = n! a_n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (\Rightarrow \text{единственность разложения})$$

В этом случае степенной ряд определяется однозначно, причем его коэффициенты считаются по ф-ле

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ряд Тейлора ф-ции $f(x)$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Замечание указанное в т. 1 усл. не явл. достаточным. (40)

Пример О. Коши

(ф-ция ∞ дифф-ма, но неразложима в сход. ряд)

расст. $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Если эту ф-цию можно разложить в степ. ряд то этот ряд может быть только рядом Тейлора.

Непр. ф-ция $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-1/x^2}=0=f(0)$

чётная

$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-1/h^2}-0}{h}=$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\frac{a}{e^{a^2}}=0$

$\frac{1}{h}=a$

$f'(x)=e^{-1/x^2}\left((-2)x^{-3}\right)=2x^{-3}e^{-1/x^2}$, $x\neq 0$

$f''(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2h^{-3}e^{-1/h^2}}{h}=$ ($f'(0)\to 0$)

$=2\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^4}{e^{1/h^2}}=2\lim\limits_{a\to\infty}\frac{a^4}{e^{a^2}}=0$ (степенная / показат.)

$\frac{1}{h}=a$

$f(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$

Но $f^{(k)}(0)=0$, $k=1,2,\ldots k,\ldots$

У этого ряда все коэф $=0$

$0\neq f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}0\cdot x^n=0 \Rightarrow \varnothing$

4° Разложения нек. эл. ф-ций в ряд Тейлора

1) $f(x)=e^x$

Ф-ла Тейлора: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x)$;

$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$, $|\xi|\in(0,|x|)$ {Лагранж}

При $|x|<r \Rightarrow |\xi|<r \Rightarrow$

$\Rightarrow |R_{n+1}(x)|\leq\frac{e^r}{(n+1)!}r^{n+1}$

$e^x\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

Остаток: $e^x-S_N(x)=R_{N+1}(x)$

$\Rightarrow |e^x-S_N(x)|\leq\frac{e^r}{(n+1)!}r^{n+1}\to 0$ если $|x|\leq r$

$\lim\limits_{N\to\infty}|e^x-S_N(x)|=0 \quad \forall x\ |x|\leq r$

2) $f(x)=\cos x$: $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$

$+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+2}(x)$

$$|R_{n+2}(x)| \le \frac{1}{(2n+2)!}|x|^{2n+2} \underset{|x|\le r}{\le} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

не игр. $\cos x \le 1$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3) $f(x) = \sin x$: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$+ R_{2n+3}(x)$

$$|R_{2n+3}(x)| \le \frac{1}{(2n+3)!} r^{2n+3} \quad \forall x\ |x| \le r$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4) $y = \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

Если $x \in (0,1)$, то

$$|R_{n+1}(x)| \underset{\{\text{Лагранж}\}}{\le} \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Если $x \in (-1, 0)$, то $x \in [-r, 0)$, $r \in (0,1)$

$$|R_{n+1}(x)| \underset{\{\text{Коши}\}}{\le} \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

5) $y = (1+x)^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Если $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ряд обрывается $\Rightarrow$ биномиальное разложение

$$|R_{n+1}(x)| \underset{\{\text{Коши}\}}{=} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} x^{n+1} (1-\theta)^n$$

$\theta < 1 \Rightarrow 0 < \xi = \theta x < x$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)\cdot(1+x)^{\alpha-n-1}$$

$$\Rightarrow R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!} x^{n+1}(1-\theta)^n$$

$$= \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!} x^n \cdot (1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot x \cdot \alpha$$

$n\to\infty$: первый множитель $\downarrow 0$ (<1); второй $\downarrow$ $n\to+\infty$ 0; $\theta = \theta(n)$, $1+\theta x \le 1+|x|$ $\Rightarrow$ ограничена

$\frac{1-\theta < 1}{1+\theta x > 0} < 1$

$-1 < x < 1$

$-1 < \theta x < 1$

$1-\theta < 1+\theta x$

$\theta(1+x) > 0$

$(1+x)^{\alpha-1}$ общий член это ряда

$$f^{(n)}(x) = (\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}$$

$$a_n x^n = \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} x^n$$

$$(1+x)^{\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

Если он сход $\Rightarrow$ общий член $\to 0$ (необх. усл. сход.)
$\forall\, x \in (-1,1)$

Докажем сходимость с помощью Даламбера

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(\alpha-(n+1))\, x^{n+1}\, n!}{(n+1)!\,(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)\, x^n} =$$

$$= \underbrace{\frac{(\alpha-n-1)x}{(n+1)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} -1} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{p_{n+1}}{p_n}\right| = |x| \in [0,1) \Rightarrow$$

а) по Даламберу ряд сходится $\Rightarrow$ ч.д.

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

б) $y = \operatorname{arctg} x$, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

разложим в ряд Тейлора $\nearrow$, а затем проинтегрируем

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$0 \le x^2 < 1$

$(-1 < x < 1)$ $\quad |a_n| = \begin{cases} 1, & n : 2 \\ 0, & n \not: 2 \end{cases}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1/1 = 1$$

(т.к. верхний!)

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \int_0^t x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2}.$$

$\forall\, t \in (-1,1)$

$$\cdot \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{ч.д.}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n+2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$$

Замечание

а) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$ $\quad z$-комп.

б) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

в) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

$\forall$ ряда $R = \infty$

а) Замена: $z \to iz$

$$\Rightarrow e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \ldots$$

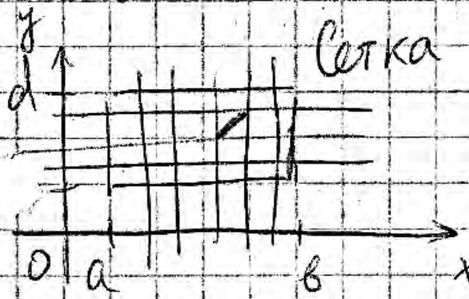
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right)$$

$\cos z$ $\qquad$ $\sin z$

$\Rightarrow e^{iz} = \cos z + i\sin z$ Ф-ла Эйлера

Глава III Интегрирование функций нескольких переменных

§1 Двойной интеграл: определение и усл. существования



$R = [a \le x \le b] \times [c \le y \le d]$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$

$R_{kl} = [x_{k-1} \le x \le x_k] \times [y_{l-1} \le y \le y_l] \Rightarrow$

разбиение T прямоуг. R

$\Delta_{kl} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$

$\Delta = \max\limits_{k,l} \Delta_{kl}$ – диаметр разбиения T

В каждом R_{kl} берем $M_{kl}(\xi_k, \eta_k) \in R_{kl}$

$\sum\limits_{k,l} f(\xi_k, \eta_k) \underbrace{\Delta x_k \Delta y_l}_{\text{площадь } \Delta R_{kl}} \overset{\text{def}}{=} \sigma(f)$ – интегральная сумма

$f(x,y)$ задана на R

Опр Интегральные суммы $\sigma(f)$ имеют предел при диаметре разбиения $\to 0$, если $\exists I \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ $\forall T$, диаметр $\Delta < \delta$, $\forall$ выбор M_{kl}:

$$|\sigma(f) - I| < \varepsilon$$

Опр Если вн интегр. суммы $\exists$, то $f(x,y)$ интегрируема на R (по Риману) и сообщ $I = \iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = dS$

Подход Дарбу Пусть $f(x,y)$ задана на R и T – разбиение

Зам: Аналогично определению интеграла Римана на отр, исходя только из определения можно д-ть, что если $f(x,y)$ интегр на R, то $f(x,y)$ огр. (Вовремя!)

Пусть $\forall R_{kl}$: $m_{kl} \equiv \inf\limits_{(x,y)\in R_{kl}} f(x,y)$,

$M_{kl} \equiv \sup\limits_{(x,y)\in R_{kl}} f(x,y)$

$\Rightarrow s(f) = \sum\limits_{k,l} m_{kl} \Delta R_{kl}$ $S(f) = \sum\limits_{k,l} M_{kl} \Delta R_{kl}$

(ΔR_{kl} – площадь прямоуг.; $S(f)$ – верхняя сумма Дарбу; $s(f)$ – нижняя сумма Дарбу)

Св-ва сумм Дарбу (д-ва повторить)

1) $\forall f(x,y)\ \forall T \quad s(f) \le \sigma(f) \le S(f)$

2) $\forall T\ \forall \varepsilon>0\ \exists (\xi_{kl}, \eta_{kl}) \in R_{kl}\ \forall k,l$

$0 \le \sigma(f) - s(f) < \varepsilon \qquad (s(f) = s(f,T);\ \sigma(f) = \sigma(f,T,(\xi_{kl},\eta_{kl})))$

$0 \le S(f) - \sigma(f) < \varepsilon$

3) $\forall T$ если $\tilde{T}$ получено из T добавлением прямых разбиения, то

$\tilde{s}(f) \ge s(f) \quad \tilde{S}(f) \le S(f)$

4) Если T' и T'' — 2 разб. R, то ~~любая~~ нижняя сумма $s'(f) \le$ ~~любой~~ верхней суммы $S''(f)$

5) Мн-во всех нижних сумм Дарбу огр. сверху, всех верхних — снизу

$\Rightarrow \exists \sup_T s(f) \overset{def}{=} \underline{I},\ \exists \inf_T S(f) \overset{def}{=} \overline{I}$

нижний интеграл Дарбу — $\underline{I}$; верхний инт. Дарбу — $\overline{I}$

6) Если разб. T' получено из разб T добавлением N прямых, то выполнены нер-ва

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le s'(f) - s(f) \le \\ 0 \le S(f) - S'(f) \le \end{array}\right\} (\sup_R f - \inf_R f) \cdot \sqrt{(b-a)^2+(c-d)^2} \cdot N \cdot \Delta$$

Δ — диаметр T

7) (Интегралы Дарбу как пределы верх/нижн инт. сумм при $\Delta \to 0$)

$\underline{I} = \lim_{\Delta\to 0} s(f)$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \forall T$ с диам. $\Delta<\delta \quad 0 \le \underline{I} - s(f) < \varepsilon$

$\overline{I} = \lim_{\Delta\to 0} S(f) \ \dots\ 0 \le S(f) - \overline{I} < \varepsilon$

Теор 1 (критерий интегрируемости Дарбу)

Огранич. $f(x,y)$ на R интегр. на R $\Leftrightarrow \underline{I} = \overline{I}$,

т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists$ разб T: $|S(f) - s(f)| < \varepsilon$

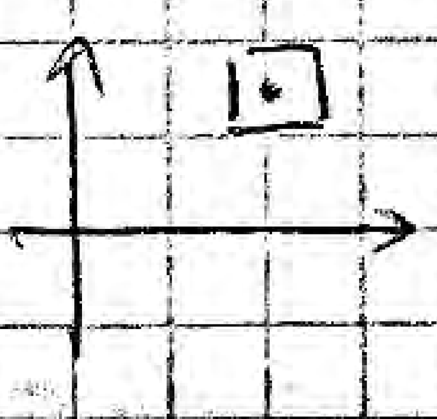
(Аналогично)

Теор 2 Любая непрерывная на R $f(x,y)$ интегр. на нём

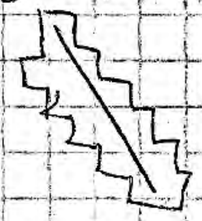
Д-во: Если ф-ция $f(x,y)$ непр на R, то ~~она явл. равн. непр~~, то она огр на R и она явл. равн. непр на R ..., тогд

Опр Огр. на R ф-ция $f(x,y)$ обладает I-св-вом, если все точки меньше её разрывов (Q) таковы, что $\forall \varepsilon>0\ \exists$ простейшая многоуг. фигура M: $M \supset Q$ и её площадь $< \varepsilon$

Простейш. многоуг. фиг. = многоуг., все стор. кот. $\parallel$ одной из осей координат

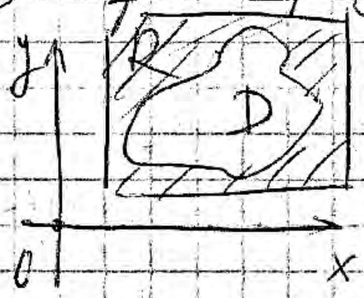


Спрямляемая кривая имеет площадь нуль, т.е. $\exists$ прост. мног. фиг., её содержащая



Теор 3 Если $f(x,y)$ обладает I-св-вом, то она инт. на R

② Случай произв. области



D - область, огранич.

$\Gamma = \partial D$ имеет площадь нуль

на D задана ф-ция

На D задана $f(x,y)$. Рассм. моб. прямоуг.

$R = [a \le x \le b] \times [c \le y \le d]$

~~$D \subset R$~~ $D \subset R$. Построим новую функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Определение (*) Ф-ция $f(x,y)$ наз. инт. в D если построенная ф-ция $F(x,y)$ инт. на R

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \overset{def}{=} \iint_R F(x,y)\,dxdy$$

Теорема 4 $\iint_D 1\,dxdy =$ площадь D

Д-во:

Верхняя инт. сумма Дарбу для $f(x,y) \equiv 1$ в D

$S(f) = \sum_{\Delta R_{kl} \cap D \ne 0} \Delta R_{kl} =$ площадь многоуг. фиг., кот. содержит D, т.е. D вписана в эту фиг.

$S(f) = \sum_{\Delta R_{kl} \subset D} \Delta R_{kl} =$ площ. многоуг. фиг., кот. вписана в D.

Т.к. D - квадрируема, то $S(f) \le$ площадь $D \le S(f)$

Теор 5 1) Если $f(x,y)$ непр. в D, то $f(x,y)$ интегр. в D

2) Если $f(x,y)$ обладает I-св-вом в D, то она интегр. в D.

Аналогично, дополнение функции.

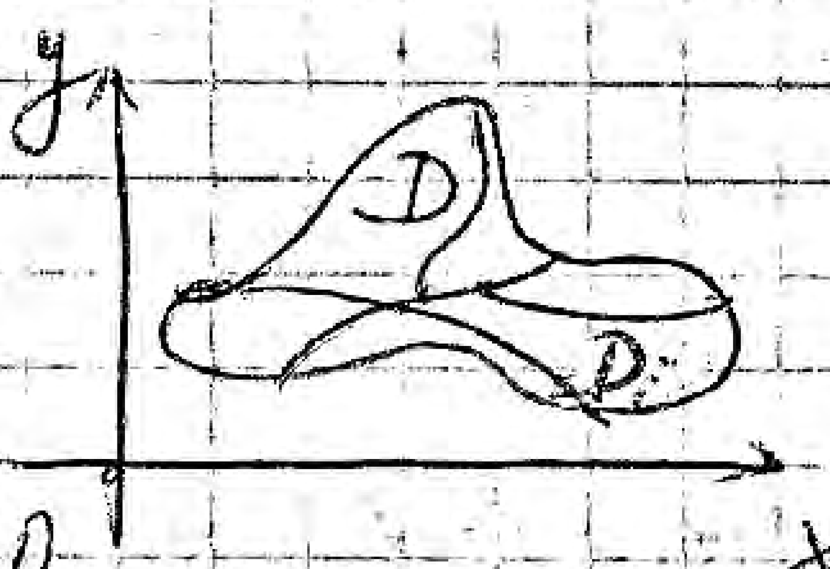
Зам Даже если $f(x,y)$ непр. в D, ф-ция $F(x,y)$, опр. по ней f $R \supset D$, может терпеть разрыв на Γ (границе). Но т.к. Γ имеет площадь 0, то $F(x,y)$ будет обладать I-св-вом в R

Следствия 1) огр. ф-ция $f(x,y)$ инт. в D, если она имеет в D конечное число точек разрыва и/или конечное число спрямляемых линий разрыва.

2) Если огр ф-ция в D $g(x,y)$ отличается от $f(x,y)$ только на мн-ве площаду 0 (а всюду вне него совпадает с f), то из интегр. $f(x,y) \Rightarrow$ интегр. $g(x,y)$

и $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy$

3° Определение 2-ного инт. с пом. произв. разбиений



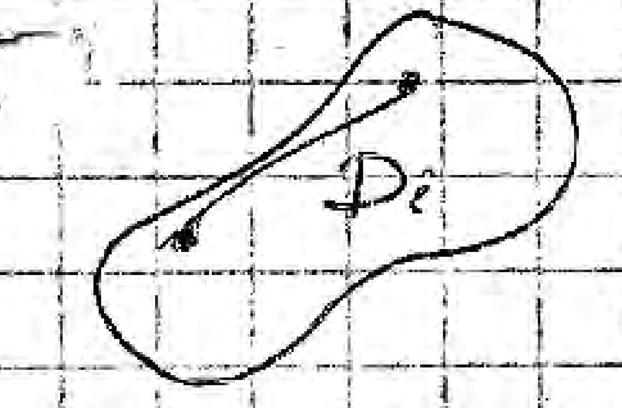
D - огр. обл с границей Γ площади 0.
на D задана $f(x,y)$

Рассм в D конечное число спрямляемых кривых.
И пусть эти кривые разбивают D на конечное число областей без внутренних точек пересечения

$$D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$$

Т.к. ∂D_i - спрямляемые кривые (границы) $\Rightarrow$
D_i - квадрируемые: $d_i = |D_i|$

Т.к. D_i ограничена, то $\exists \sup\limits_{M,N \in D_i} \rho(M,N) = \Delta_i$ - диаметр $D_i \Rightarrow$



$\max\limits_i \Delta_i = \Delta$ - диаметр разбиения

(*) Опр: Интегр. суммой для $f(x,y)$, соотв. данному разбиению $D = \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i$ назовем

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^{m} f(M_i)\,d_i, \text{ где } M_i \in D_i \text{ (точка)}$$

Число I назыв. пределом $\sigma(f)$ при $\Delta \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $\forall$ разб. $D = \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i$ диаметр $\Delta < \delta$ и любого выбора точек $M_i \in D_i$:

$$|\sigma(f) - I| < \varepsilon$$

I - интеграл по D от $f(x,y)$

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Теор. б/д Опр. (+) и (*) эквив. для квадр. D, причем они дают одинак. знач. пределов инт. сумм.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

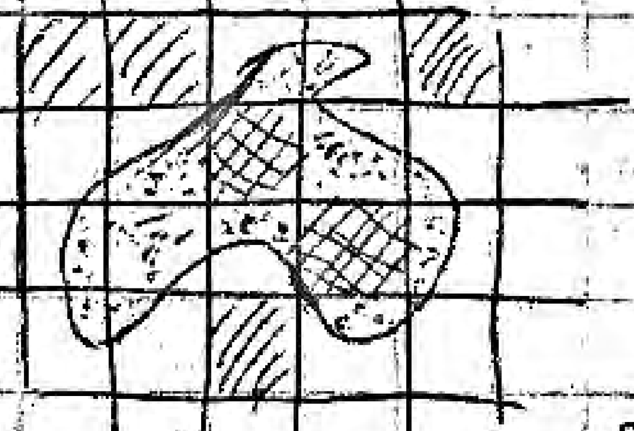
ξ_1 ξ_2

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

η_1 η_2

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ многоуг. фиг площади $< \varepsilon$
Не счетное!

Д-во $(*) \Rightarrow (*)$



$\sigma(f)$, $S'(f)$, $s'(f)$

← 0-ая сумма

← усеченное в обл. F)

част разбиения обл. на части

F ← часть

$S'(f)$ отличается от $\tilde{S}(f)$ (верхней суммы Дарбу разбиения самой обл. D) на слагаемые в кот. соотв. обл-ти разбиения лишь частично содержатся в D

Т.к. ∂D (граница обл) имеет площадь 0 и ф-ция $f(x,y)$, то вклад этих слагаемых $\to 0$ (т.к. покрывают границу) $\Delta \to 0$

$$\tilde{S}(f) - \tilde{s}(f) \le S'(f) - s(f) < \varepsilon$$

$\tilde{s}(f) \le \sigma(f) \le \tilde{S}(f)$ сама обл.

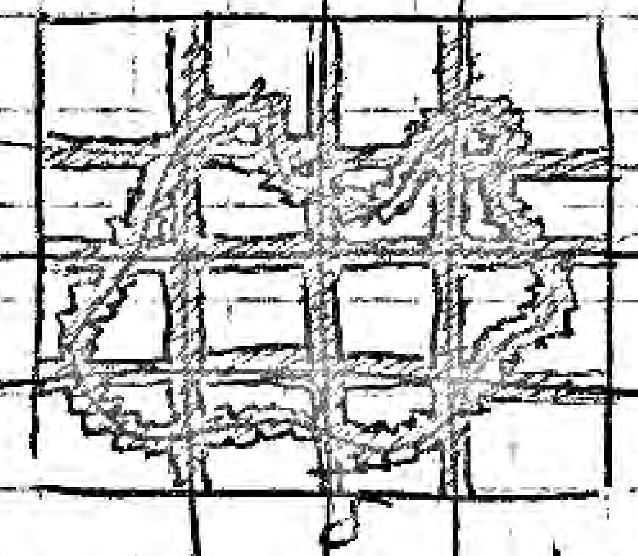
$s(f) \le \sigma(f) \le S'(f)$ прямоуг

$\tilde{S}(f) \le S'(f) + \varepsilon_1$, $\quad \tilde{s}(f) \le s(f) + \varepsilon_1$

$(*) \Rightarrow (*)$

Рассм. такое разбиение пр-ка $R \supset D$ прямыми, для кот.

$$S'(f) - s(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$



$\exists$ многоуг. фиг, содержащая внутри себя все отрезки этого разбиения и границу D, площадь кот. мала, $< \frac{\varepsilon}{6M_0}$,

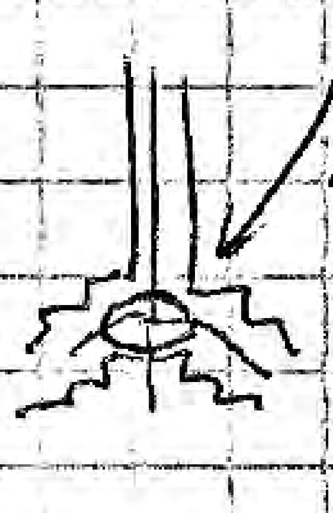
где $M_0 = \sup_D |f(x,y)|$

$\delta > 0$ — мин расстояние от линий разб. и ∂D до границы этой многоуг. фиг.

Рассм. разб обл. D на произв подобласти D_i, $D = \bigcup_{i=1} D_i$, диаметр кот. $< \delta$

Тогда $\forall$ подобласти D_i

либо имеет общие т. с линиями разбиения и границами обл. — либо не имеет общих т. с линиями разб. и с границ обл.



лежит здесь, в силу выбора δ лежит внутри многоуг. фигуры

в силу выбора δ лежит внутри пр-ка R (большого) разбиения

Рассм. в. и н. суммы Дарбу, отвеч. разб. $D = \cup D_i$

$S^*(f) = \sum_i M_i \Delta D_i$ $\qquad \tilde{s}(f) = \sum_i m_i \Delta D_i$

$S'(f) = \sum (M_i) \Delta D_i + \sum'_{\text{остальные } i} M_i \Delta D_i$

индекс i: $D_i \cap$ {мелкие разб. и ∂D}

$\le \sum_{i: D_i \cap \{\}} M_0 \Delta D_i + \sum'_{\text{ост. } i} M_i \Delta D_i \le$

$\le M_0 \cdot \frac{\varepsilon}{6 M_0} + \sum'_{\text{ост. } i} M_i \Delta D_i = (**)$

Рассм. какой-либо пр-к разб. R_k: объединим все $D_i \subset R_k$ в одну область. Пусть его площадь (объединения) $= \Delta \tilde{R}_k$

Тогда $\sum'_{\text{ост. } i} M_i \Delta D_i \le \sum_k M_k \Delta \tilde{R}_k =$ (вырезан)

$= \sum_k M_k \Delta R_k + \sum_k M_k \Delta (R_k \setminus \tilde{R}_k)$

(площадь прямоуг.; все эти дополнения лежат в многоуг. рис.)

$< \sum_k M_k \Delta R_k + M_0 \cdot \frac{\varepsilon}{M_0 \cdot 6}$

$\Rightarrow \tilde{S}(f) < \frac{\varepsilon}{6} + S'(f) + \frac{\varepsilon}{6} = S'(f) + \frac{\varepsilon}{3}$

Аналогично

& $\tilde{s}(f) > s'(f) + \frac{\varepsilon}{3}$

$<\varepsilon/3 \quad I_1 \quad <\varepsilon/3 \quad \tilde{S}(f)$

$\tilde{s}(f) \quad s(f) < \varepsilon/2\; S(f) \quad I_2$

I_1, I_2 – интегралы

$\Rightarrow \tilde{S}(f) - \tilde{s}(f) < \frac{7\varepsilon}{6}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ разб. $D = \cup_i D_i$:

$\Rightarrow$ ф-ция $f(x,y)$ интегр. по (*)

$I_1\ I_2$ – сближаются при $\varepsilon \to 0$, что.

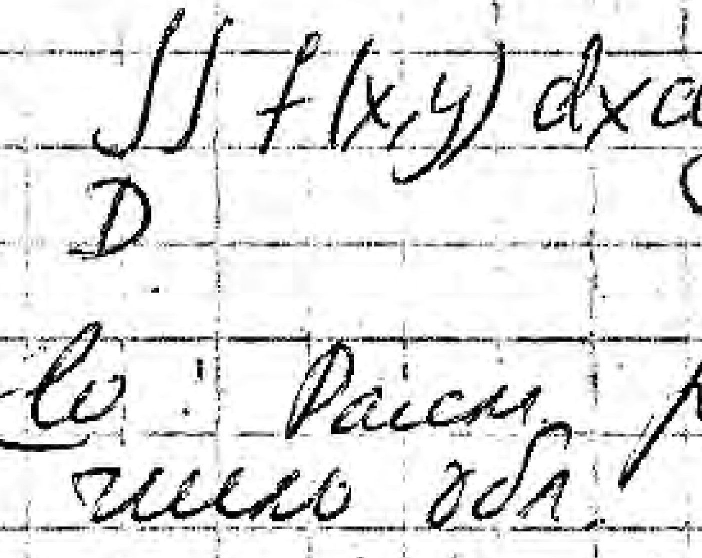
§2 Основные св-ва двойных интегралов

1° Св-во аддитивности

Пусть обл. D разбита спрямляемой кривой на 2 части D_1 и D_2, $D = D_1 \cup D_2$. Если $f(x,y)$ инт. на D, то $f(x,y)$ инт. на D_1 и D_2, при этом

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

Д-во: Рассм. разб. D_1 и D_2 на конечное число обл., в. и н. суммы обозначим $S_1(f), s_1(f), S_2(f), s_2(f)$



Объединение этих разбиений = разбиение D (к мелкому разб. добавляется линия, разбивающая D на 2 части)

Т.к. на D $f(x,y)$ инт., то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разб. малого диам.

$0 \le S(f) - s(f) < \varepsilon$ (в таких разб. участвует разделяющая линия)

$S_1(f) + S_2(f) \qquad s_1(f) + s_2(f)$

$$0 \le \underbrace{\overline{S}_1(f) - S_1(f)}_{\ge 0} + \underbrace{\overline{S}_2(f) - S_2(f)}_{\ge 0} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{S}_1(f) - S_1(f) \le \varepsilon \\ \overline{S}_2(f) - S_2(f) \le \varepsilon \end{cases}$ {критерий инт.} $\Rightarrow f(x,y)$ инт. на по D_1 и по D_2

$$I \stackrel{def}{\equiv} \iint\limits_D f\,dxdy \ ; \quad \underbrace{s(f)}_{s_1(f)+s_2(f)} \le I \le \underbrace{\overline{S}(f)}_{\overline{S}_1(f)+\overline{S}_2(f)}$$

$$I_j \stackrel{def}{\equiv} \iint\limits_{D_j} f\,dxdy \qquad s_j(f) \le I_j \le \overline{S}_j(f), \quad j = \{1, 2\}$$

$\Rightarrow s(f) \le I_1 + I_2 \le \overline{S}(f)$, $\overline{S}(f) - s(f) \xrightarrow[\Delta \to 0]{} 0$

$s(f) \le I \le \overline{S}(f)$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2$, чтд

Утв. 2 Пусть D разбита спрямляемыми кривыми на $D = D_1 \cup D_2$

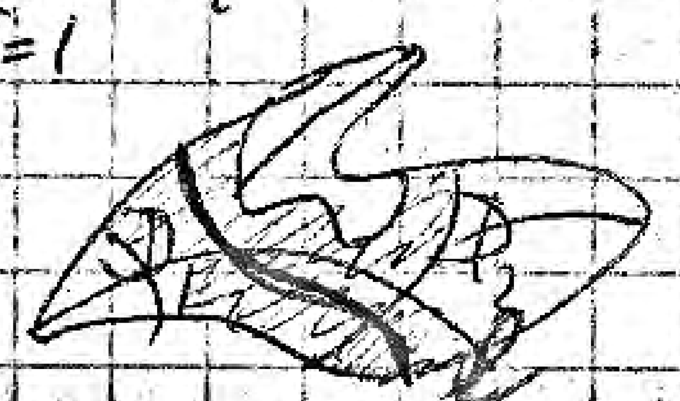
Если $f(x,y)$ инт. на D_1 и D_2

$\Rightarrow$ она инт. на D, при этом

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Д-во Расс. произв. разб. D на подобл.

$D = \bigcup\limits_{i=1}^m \tilde{D}_i$



$\overline{S}(f) \to$ к $\overline{S}_1(f)$ и $\overline{S}_2(f)$ отлич. в тех областях где они захватывают l (кр.)

$\overline{S}(f) = \overline{S}_1(f) + \overline{S}_2(f) + \{$слаг. соотв. $\tilde{D}_j \cap$ линия разделения $\ne \varnothing\}$

Линия раздела имеет площадь 0 и $f(x,y)$ огранич., поэтому при диаметре разб. $\Delta \to 0$

$$\overline{S}(f) = \overline{S}_1(f) + \overline{S}_2(f) + \{\ldots\}$$

$\overline{S}_1(f) \to \iint\limits_{D_1} f\,dxdy$, $\quad \overline{S}_2(f) \to \iint\limits_{D_2} f\,dxdy$, $\quad \{\ldots\} \to 0$

$\Rightarrow \overline{S}(f)$ имеет предел при $\Delta \to 0$

Аналогично для

$$s(f) = s_1(f) + s_2(f) + \{\ldots\}$$

$\Rightarrow$ ф-ция f инт. на $D = D_1 \cup D_2$

2° Св-во линейности:

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

интегр.

3° Интегрируемость произведения

Если f и g инт. на $D \Rightarrow$

fg инт на D

④ Интегрирование нер-ва

Пусть $f(x,y) \le g(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$ и каждая ф-ция инт. на D
Тогда:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy$$

⑤ Если $f(x,y)$ инт-ма на D, то $|f(x,y)|$ инт-ма на D и

$$\left|\iint\limits_D f\,dx\,dy\right| \le \iint\limits_D |f|\,dx\,dy$$

⑥ Ф-ла среднего значения

Пусть $f(x,y)$ и $g(x,y)$ инт. на D и $g(x,y) \ge 0$ на D. Тогда $\exists \mu \in \mathbb{R}$:

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy$$

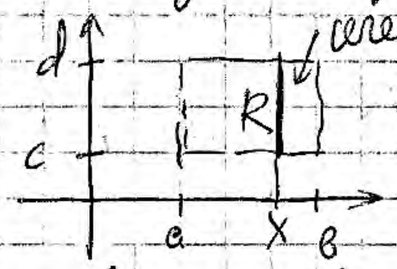
$$\inf\limits_D f(x,y) \le \mu \le \sup\limits_D f(x,y)$$

Зам. об.: Если $f(x,y)$ непр в D и D связная, то $\exists \mu \in \mathbb{R}$ в св-ве ⑥ $\exists (\xi,\eta) \in D$ $\mu = f(\xi,\eta)$

⑦ $\iint\limits_D 1\,dx\,dy =$ площадь D

§3 Сведение двойного интеграла к повторному

1° Случай прямоугольника



$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$$

Теор. 7 Пусть: 1) $f(x,y)$ инт. на R
2) $\forall x \in [a,b]$ $\exists$ интеграл $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$

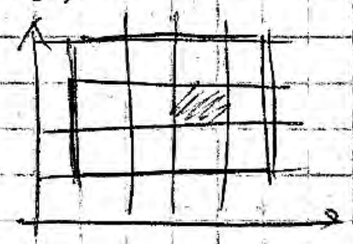
Тогда $\exists$ повторный интеграл

$$\int\limits_a^b I(x)\,dx = \iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$$

Д-во: Рассм. $\forall$ разбиение Т пр-ка R: $R = \bigcup\limits_{k,l} R_{kl}$

$\forall R_{kl}$: $m_{kl} = \inf\limits_{R_{kl}} f(x,y)$
$M_{kl} = \sup\limits_{R_{kl}} f(x,y)$

$\forall (x,y) \in R_{kl}$: $m_{kl} \le f(x,y) \le M_{kl}$



$R_{kl} = \{x_{k-1} \le x \le x_k,$ (60)
$y_{l-1} \le y \le y_l\}$

Проинт. по y в допустимых пределах,

$f(x,y)$ инт-на т.к. $\exists\ I(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$

$\int \{\, m_{kl} \le f(x,y) \le M_{kl} \,\}$

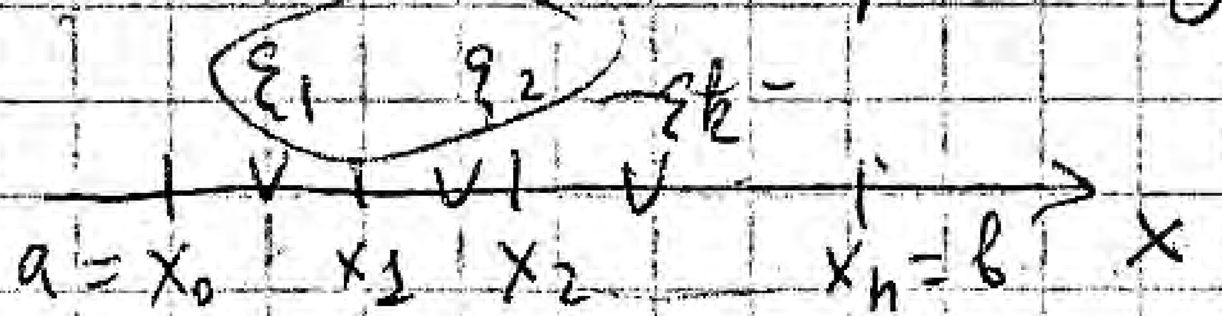
$$m_{kl}\Delta y_l \le \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x,y)\,dy \le M_{kl}\Delta y_l \quad \forall \text{ по } l=1,\dots,m$$

Сложим почленно

$$\sum_{l=1}^{m} m_{kl}\Delta y_l \le I(x) \le \sum_{l=1}^{m} M_{kl}\Delta y_l \quad \forall x\in[x_{k-1},x_k]$$

~~<=> ...~~

любая промежуточная точка



$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{m} m_{kl}\Delta y_l \le I(\xi_k) \le \sum_{l=1}^{m} M_{kl}\Delta y_l \quad \Big|\, \Delta x_k$$

сложим по k

$$\sum_{k,l} m_{kl}\Delta y_l\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k,l} M_{kl}\Delta y_l\Delta x_k$$

($\max\Delta x_k \to 0$ т.к. ...)

нижняя сумма Дарбу; интегр. сумма повт. инт.; Верхняя сумма Дарбу

При диаметре разб. T $\Delta\to 0$ нижн. и верхн. суммы имеют общий предел, $\longrightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

$\max\{\Delta x_k\}\to 0$, т.к. $\max\{\Delta x_k\}\le\Delta$

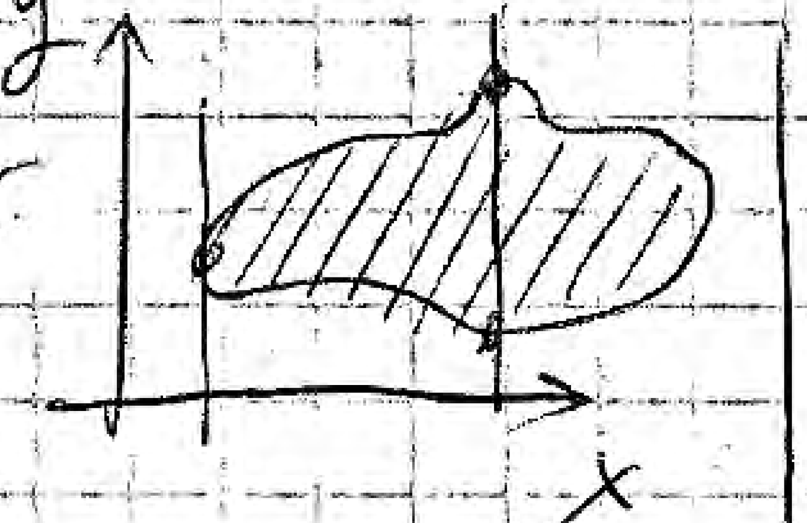
Из двойного нер-ва $\Rightarrow$ при $\max\{\Delta x_k\}\to 0$ инт. сумма повт. инт. имеет предел, равный

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow \text{этот же предел} = \int_a^b I(x)\,dx, \text{ чтд.}$$

Замечание. Ут-в Т. 7 остается справедливым, если в ней поменять ролями переменные x и y.

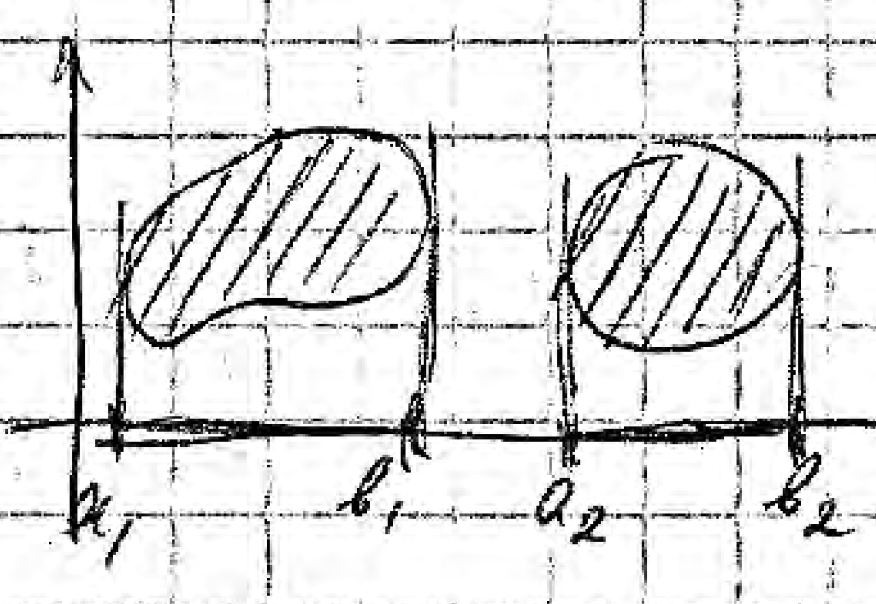
2° Случай произвольной области

Рассм. произв. обл. D: ограничена и $\partial D=0$. Кроме того, пусть пересечение границы обл. с любой верт. прямой $x=x_0$ состоит не более, чем из 2 точек



Для $\forall x$, для кот. такое $\cap$ есть, рассм. $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $y_1(x)\le y_2(x)$

Те x, для кот. есть $\cap$, образуют отрезок $[a,b]$



Теор 8

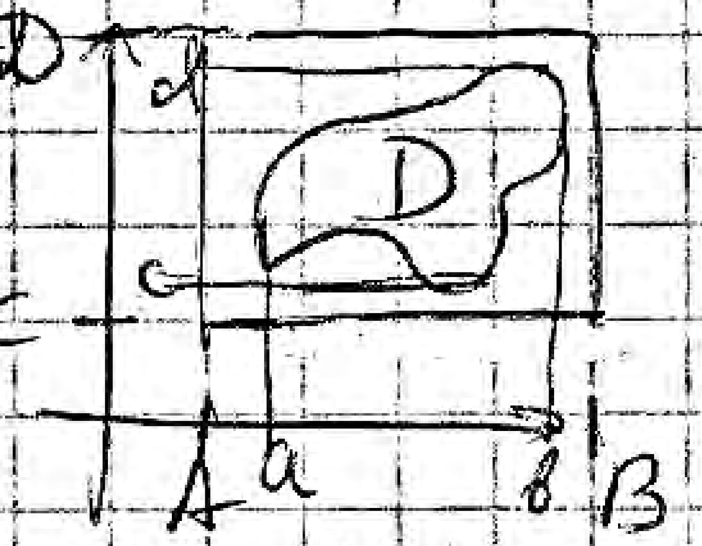
Пусть в рассматриваемой обл. D задана $f(x,y)$, кот. инт. в D $\forall x \in [a,b]$ $\exists$ инт.

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Тогда $\exists$ повт. интеграл

$$\int_a^b I(x)\,dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Д-во Рассм. пр-к $R \supset D$ и $F(x,y)$:



$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \overset{(*)}{=} \iint_D F(x,y)\,dx\,dy \overset{\{т.7\}}{=}$$

$$= \int_A^B dx \left(\int_C^D F(x,y)\,dy \right) \quad (**)$$

$\exists$ для кажд. x, т.к.

почему $\exists$? $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = I(x)$ $\exists$ по усл. т., а ост. часть — это 0

$$I(x) + 0 = \int_C^D F(x,y)\,dy$$

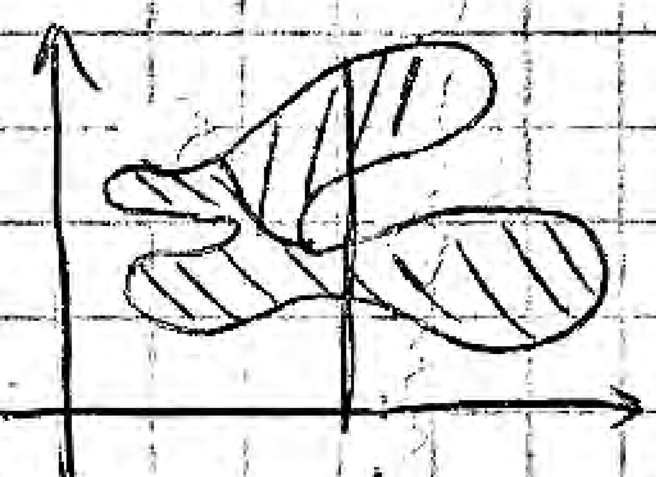
$$(**) = \int_a^b dx \left(\int_C^D F(x,y)\,dy \right) = \int_a^b dx\, I(x) = \int_a^b I(x)\,dx,$$ чтд.

(иначе там 0)

Зам 2 Теор 8 верна и в случае, когда x и y меняются ролями

Зам 3 Д-во т.8 соверш. аналогично для обл. D, у кот. либо при $x=a$, либо при $x=b$ пересечение с границей явл. отрезком

Зам 4 Переход к повт. инт. возможен и для более сложных областей



разобьём на 2 части. $D = D_1 \cup D_2$ и воспользуемся аддитивностью интеграла

Т.е. можно рассматривать обл. D, явл. объединением конечного числа обл., обладающих в т.8 св-вом

§4 Кратные и n-кратные интегралы

Рассм $D \subset \mathbb{R}^n$ и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(x)$ задана в D $\rightsquigarrow$? $\iint\limits_D \ldots \int f(x_1, \ldots)\,dx_1 \ldots dx_n$

$(x = (x_1, \ldots, x_n))$ $\;dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n \equiv dx)$

① n-мерный объём

а) объём n-мерного ||-пипеда

$$[a_1 \le x_1 \le b_1] \times \ldots \times [a_n \le x_n \le b_n] \overset{def}{=} (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

б) Элементарное n-мерное тело — объединение конечного числа n-мерных ∥-пипедов вида в п. а)

в) Используя аддитивность ф-ции объёма (меры) каждому эл-ому n-мерному телу сопоставляется его объём.

г) Говорят, что мн-во $D \in \mathbb{R}^n$ имеет объём, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ K_1 \subset D$ и $K_2 \supset D$ (K_1, K_2 — эл. тела) : $|V(K_2) - V(K_1)| < \varepsilon$, где V — ф-ия объёма.

Тогда $V(D) \stackrel{def}{=} \sup\limits_{K_1 \subset D} V(K_1) \stackrel{def}{=} \inf\limits_{K_2 \supset D} V(K_2)$

д) рассм. D = n-мерн. ∥-пипед, вводим $\int\limits_D f(x)dx$ через разбиение D гиперплоскостями на частичные ∥-пипеды и переходим к lim при $\Delta \to 0$

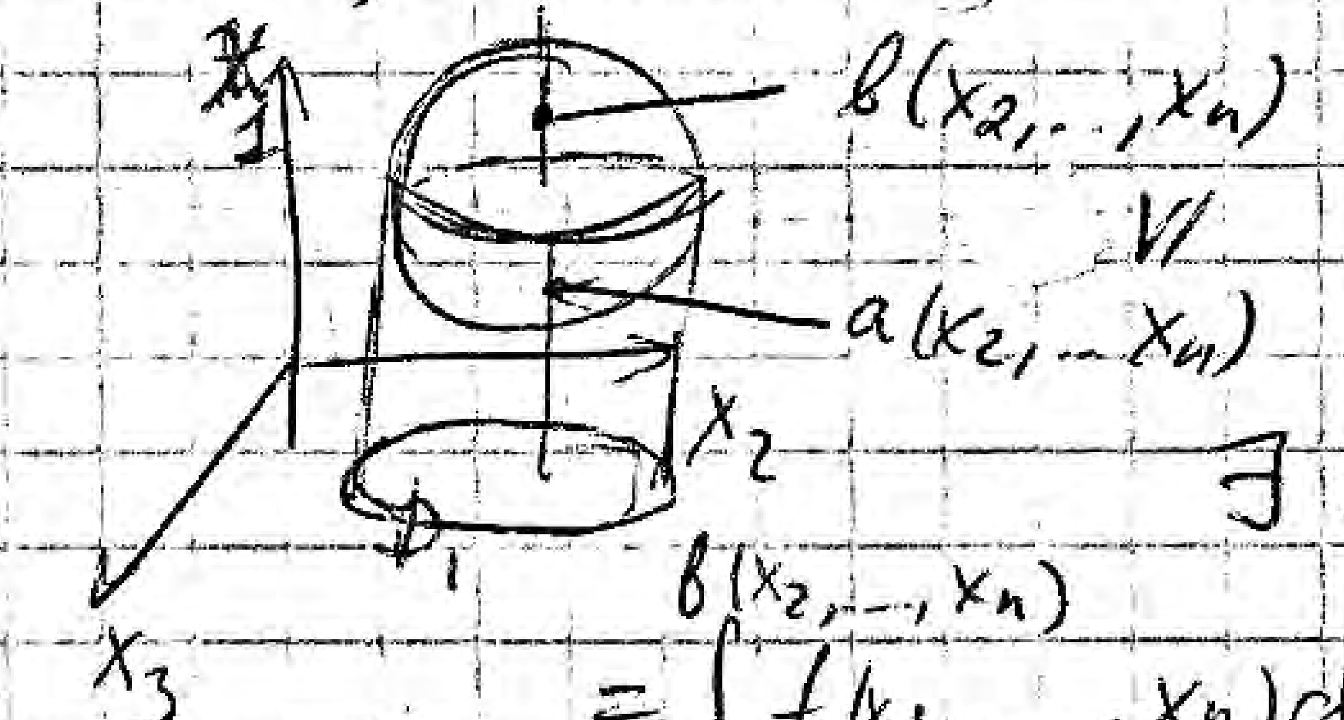
е) Если D — произв. обл., то $\int\limits_D f(x)dx$ вводится либо через "описанный" ∥-пипед ($D \subset R$), либо через $\forall$ разб. D

ж) Опр-я п. е) эквив.

з) Для n-мерного инт. можно д-ть, что $\forall$ ф-ция f, непр. в D, инт-ма в D; любая ф-ция f, обладающая I-свойством в D инт-ма в D; выполнены все св-ва, аналогичные св-вам двойного инт.

② Ф-ла повторного инт.-ния (Фубини)

Теор 9. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ такова, что $\forall$ прямая $\parallel Ox_1$ пересекает ∂D не более, чем в 2 точках.



Пусть $f(x_1,...,x_n)$ инт. в D и $\forall (x_2,...x_n) \in D_1$

$$\exists\ I(x_2,..,x_n) = \int\limits_{a(x_2,...,x_n)}^{b(x_2,...,x_n)} f(x_1,...,x_n)dx_1$$

Тогда $\exists \int\limits_{D_1} I(x_2,...x_n)dx_2 dx_3 ... dx_n = \int\limits_D f(x)dx$

§5 Замена переменных в n-кратных интегралах

Пусть $u = f(y_1,...,y_n)$ инт. в $D \in \mathbb{R}^n$

Пусть заданы n функций

$$\begin{cases} y_1 = \psi_1(x_1,...,x_n) \\ y_2 = \psi_2(x_1,...,x_n) \\ \ \vdots \\ y_n = \psi_n(x_1,...,x_n) \end{cases}$$

ψ_j диф-мы по всем переменным в $D' \subset \mathbb{R}^n$, они осущ. взаимн. одн. соотв. между D' и D

$\Psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (т.е. найти $x_1,...,x_n$ через $y_1,...,y_n$)

$$Y = \Psi(X)$$

Это, например, гарантирует условие невырожденности якобиана преобразования в обл. D'

Якобиан $= J = \frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} = \det \| x_{kl} \|$

$\{x_{kl}\} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l}$

Тем самым, сущ. обр. отображение

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1,\dots,y_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(y_1,\dots,y_n) \end{aligned}\right\} \text{ в } D$$

Связаны: (*) $\int_D f(y)\,dy = \int_{D'} f(\psi_1(x),\psi_2(x),\dots,\psi_n(x))\,\tilde{J}\,dx$

Теор 10. Если ф-ции $\psi_1,\dots,\psi_n$ имеют непр. част. произв. в D' и $|J| \neq 0$ всюду в D, то справедлива (*), где $\tilde{J} = |J|$

Д-во может будет потом ~

Примеры замен переменных в n-кратных интегралах

① Линейная замена

$y_i = \psi_i(x_1,\dots,x_n)$ $\quad \int_D f(y)\,dy = \int_{\tilde D} \tilde f(x)\,J\,dx$

$J = \text{abs}\,\frac{D(y_1\dots y_n)}{D(x_1\dots x_n)}$

$\psi_j = a_{1j}x_1 + \dots + a_{nj}x_n + b_j \quad (j = \overline{1,n})$

$a_{ij}, b_j \in R$

Якобиан: $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = a_{ij}$

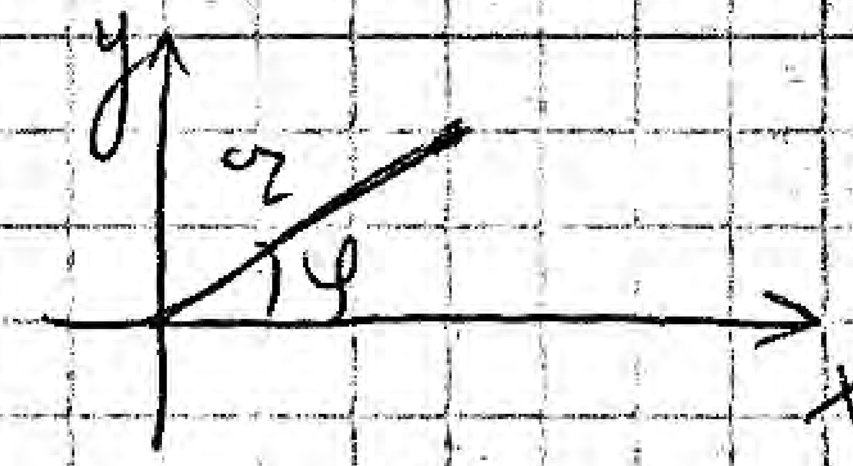
$\Rightarrow$ Якобиан - это опр. матр. лин. преоб.

$A(a_{ij}) \Rightarrow J = |\det A|$

② Полярная система координат $(n=2)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ $\quad x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

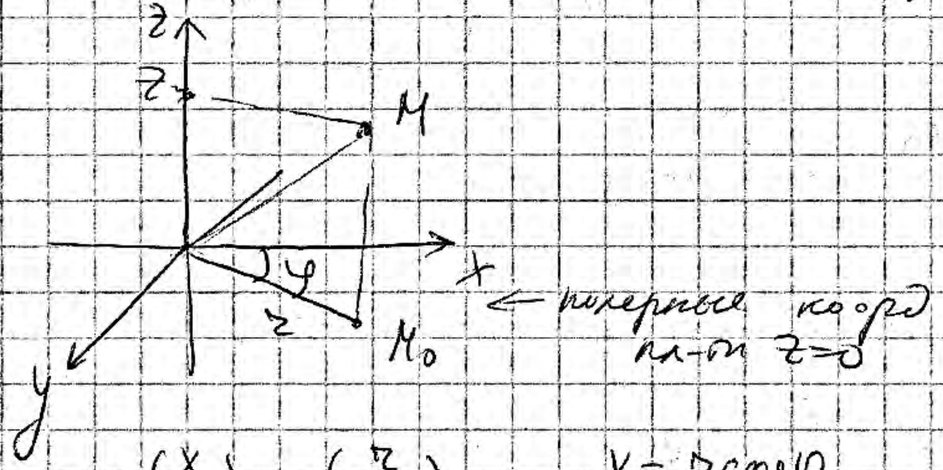
$(r \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi))$



$J = \text{abs}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$

$$\left|\begin{matrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{matrix}\right| = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \Rightarrow J = r$$

③ Цилиндрическая система координат

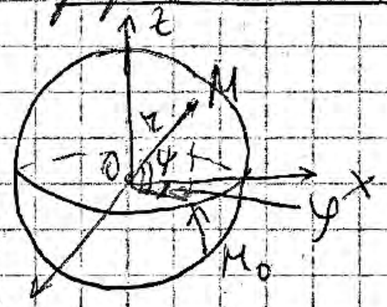


← полярная коорд на пл-ти $z=0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right| = r = J$$

④ Сферическая система координат ($n=3$)



$$r \geq 0$$
$$\varphi \in [0, 2\pi)$$
$$\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Если $OM = r$, то $OM_0 = r\cos\psi$

$$\begin{aligned} x &= (r\cos\psi)\cos\varphi \\ y &= (r\cos\psi)\sin\varphi \\ z &= r\sin\psi \end{aligned}$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi}\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi & \sin\psi \\ -r\cos\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ -r\sin\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi & r\cos\psi\end{matrix}\right|$$

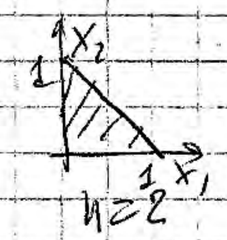
$$= \sin\psi(r^2\cos\psi\sin\psi\sin^2\varphi + r^2\cos\psi\sin\psi\cos^2\varphi)$$
$$+ r\cos\psi(r\cos^2\psi\cos^2\varphi + r\cos^2\psi\sin^2\varphi) =$$
$$\sin^2\psi\, r^2\cos\psi + r^2\cos^3\psi = r^2\cos\psi = J$$

Зам. Идучим общую сфер сист. коорд. в n-мерном пр-ве

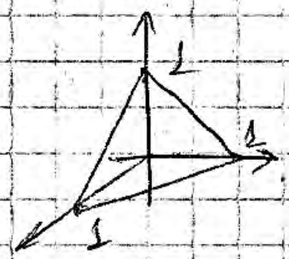
Найти объём n-мерного шара

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \leq R^2$$

Найти объём n-мерного симплекса



$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 1$$



$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$$

n-мерный симплекс

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \leq 1 \end{cases}$$

§6 Кратные несобственные интегралы

① Понятие несобств. инт. (Римана)

Рассм. n-мерн. случ. ($\mathbb{R}^n$) и $D \in \mathbb{R}^n$

Введем понятие интеграла по D в след. случ.: 1) D неогр.
2) задана на D ф-ия $f(x_1, \dots, x_n)$ неогр

Зам. $n=1$: несобств. инт. I рода

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

несобств. инт. II рода

$$\int_{a_n}^{b} f(x)\,dx = f(x) \text{ неогр. в } a \text{ при } x \to a$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Пусть $D \in \mathbb{R}^n$ - открытое и связное мн-во, $\overline{D}$ - замыкание D.

$$\overline{D} = D \cup \partial D$$

Опр Посл. $\{D_n\}$ откр. и связных мн-в в D исчерпывает D, если

1) $\overline{D_n}$ ограничено и кусочно-гладко (имеет n-мерный объём)

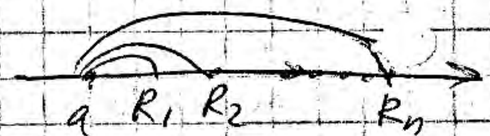
2) $\forall n \in \mathbb{N}: D_n \subset D_{n+1}$

Примеры

1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $[a, +\infty)$ исчерпывает

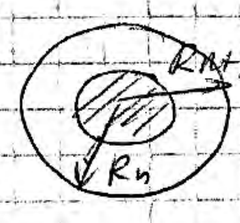
посл-ть вида $D_n = [a, R_n]$, где $R_n \geq a$

$\{R_n\} \uparrow +\infty$



2) $\mathbb{R}^2$ $D_n = \{x^2 + y^2 \leq R_n^2\}$, $R_n \uparrow +\infty$

$R_{n+1} > R_n$



③ $D = \{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

$D_n = \{R_n^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ $R_n \downarrow$

Зам Если посл-ть $\{D_n\}$ исчерпывает D, то $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

Рассм $\forall x \in D$. Ок. D - откр $\Rightarrow$
$\exists \varepsilon > 0$: ~~$U_\varepsilon(x) \subset D$~~

$U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset D \Rightarrow$

$\Rightarrow U_{\varepsilon/2}(x) \subset D \Rightarrow$ компакт $\overline{U_{\varepsilon/2}}(x) \subset D$ (замыкание)

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : K \subset D_n \Rightarrow x \in D_n \Rightarrow D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

Пусть $f(x)$ задана на откр. мн-ве $D \in \mathbb{R}^m$ и $\forall$ компакта $K \subset D$

$\exists \int_K f(x)\,dx$

Опр: Если $\forall \{D_n\}$, исчерпывающей D, $\exists \lim_{n\to+\infty} \int_{D_n} f(x)dx$ и его значение не зависит от выбора $\{D_n\}$, то говорят, что

$\int_D f(x)dx$ сходится $\left(= \lim_{n\to+\infty} \int_{D_n} f(x)dx\right)$

Пример ①:

$[a,+\infty)$: $\{[a,R_n], R_n \uparrow +\infty\}$

$I_n \equiv \int_a^{R_n} f(x)dx \quad \exists$ $\lim$

$I(R) = \int_a^R f(x)dx$ имеет предел при $R \to +\infty$

② $\mathbb{R}^2$: $\{x^2+y^2 < R_n^2, R_n \uparrow +\infty\} \equiv D_n$

$\forall D_n$ ... D_n $\mathrm{dist}(\partial D_n, 0) = r_n \to +\infty$

Из определения сходимости несобств. инт. $\Rightarrow$, что он обладает св-вами линейности и аддитивности

1) $\int_D (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_D f(x)dx + \beta \int_D g(x)dx$

2) $\int_{D_1 \cup D_2} f(x)\,dx = \int_{D_1} f(x)dx + \int_{D_2} f(x)dx$

$D_n^{(1)} = D_n \cap D_1 \quad D_n^{(2)} = D_n \cap D_2$ ...

② Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть в D $f(x) \geq 0$

Теор 1 Для сходимости $\int_D f(x)\,dx \Leftrightarrow$

$\exists$ посл-ть $\{D_n\}$, исчерпывающая D, для кот.

$a_n = \int_{D_n} f(x)dx$ ограничена.

Док-во: $\Rightarrow$ Если инт. сход, то для $\forall$ (в частности и для этой посл.

$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_{D_n} f(x)\,dx \equiv \lim_{n\to+\infty} a_n$

$\Rightarrow \{a_n\}$ огр.

$\Leftarrow$ 1) $\{a_n\}$ монот. не убыв., т.к.

$$a_{n+1} = \int\limits_{\overline{D}_{n+1}} f(x)dx \geq a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)dx$$

$\forall n \quad \overline{D}_n \subset D_{n+1} \subset \overline{D}_{n+1}$

$$\Rightarrow \int\limits_{\overline{D}_{n+1}} f(x)dx = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)dx + \underbrace{\int\limits_{\overline{D}_{n+1}\setminus D_n} f(x)dx}_{\geq 0 \text{ т.к. } f(x)\geq 0} \geq \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)dx$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ сходится.

2) Рассм. $\forall \{P_n'\}$ исчерп. D

$$a_n' = \int\limits_{D_n'} f(x)dx$$

а) $\{a_n'\}$ монот. не убыв. $(D_n' \subset D_{n+1}')$

б) Ц огр. $\{D_n\}$: $\forall n \quad D_n' \subset D_{k_n}$ $(\exists k_n)$ по n, компакт $\in D$

$\Rightarrow a_n' \leq a_{k_n} \; (\forall n) \quad a_n' \geq 0$

огр. сверху

в) Пусть $I' = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n' \quad I = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Тогда $a_n' \leq a_{k_n} \Rightarrow I' \leq I$

т.к. в этих рассуждениях посл. $\{P_n\}$ и $\{D_n'\}$ можно поменять ~~роли~~ ролями

$(\forall n \; \exists M_n : \overline{D}_n \subset D_{M_n}')$

$\Rightarrow I \leq I'$

$\Rightarrow I = I'$

Пример (интеграл Пуассона)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy$$

Рассм. след. несобств. инт.:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = (*) \quad \mathbb{R}^2 \text{ исчерпываем}$$

$$D_n = \{x^2+y^2 < n^2\}$$

$$(*) = \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left| \begin{array}{l} x = z\cos\varphi \\ y = z\sin\varphi \\ 0 \leq z \leq n \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^n e^{-z^2} z\,dz = \quad z\,dz = \tfrac{1}{2}d(z^2)$$

$$= 2\pi \lim_{n\to+\infty} \left(\tfrac{1}{2}(-e^{-z^2})\right)\Big|_{z=0}^{n} = 2\pi$$

$$= 2\pi \lim_{n\to+\infty} \left(-\tfrac{1}{2}e^{-n^2} + \tfrac{1}{2}\right) = \pi$$

Рассм др. посл. $\{D_n'\}$, исчерпывающую $\mathbb{R}^2$:

$D_n' = \{|x| \le n, |y| \le n\}$

Из определения сходимости несобственного интеграла:

$$\Pi = \lim_{n\to+\infty} \iint_{\overline{D_n'}} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n}dx \int_{-n}^{n}dy\, e^{-x^2-y^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx \int_{-n}^{n} e^{-y^2}dy\right) = 4\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x^2}dx \cdot \int_0^n e^{-y^2}dy\right) = 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Теорема 2 $\forall x \in D$ Пусть на D: $0 \le f(x) \le g(x)$

Тогда: а) $\int_D g(x)dx$ сх $\Rightarrow \int_D f(x)dx$ сх.

б) $\int_D f(x)dx$ расх $\Rightarrow \int_D g(x)dx$ расх

Д-во: а) [т.1] $\exists \{D_n\}: a_n \equiv \int_{\overline{D}} g(x)dx$

огр $\Rightarrow 0 \le \underbrace{\int_{\overline{D_n}} f(x)dx}_{a_n'} \le a_n \xrightarrow{\text{огр}} \xRightarrow{\text{т.1}} \int_D f(x)dx$ сход.

б) Аналогично, что

Замечание: $g(x) = \frac{c}{|x|^p}$

$$\int_D f(x)dx \text{ сх } \quad f(x) \le \frac{c}{|x|^p} \quad (*)$$

Если D неогр и $D \subset \mathbb{R}^m$, то

$(*)$ с $p > m$ ~~гарант~~ при $|x| \to +\infty$

гарантирует сходимость $\int_D f(x)dx$

Если D огр. $D \subset \mathbb{R}^m$ и в окр. т $x_0 \in D$

$f(x) \le \frac{c}{|x-x_0|^p}$ $f(x)$ неогр в т. x_0

то $\int_D f(x)dx$ сх если $p < m$

3° Несобственные m-кратные интегралы от произв. ф-ций ($m \ge 2$)

Опр $\int_D f(x)dx$, $D \in \mathbb{R}^m$

Теор 3 $\int_D f(x)dx$ сход $\Leftrightarrow \int_D |f(x)|dx$ сход $\boxed{m \ge 2}$

Д-во. „⇑" $f_+(x)=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))\geq 0$
$= \begin{cases} 0, & f(x)<0 \\ f(x), & f(x)\geq 0 \end{cases}$

$f_-(x)=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))\geq 0$
$= \begin{cases} 0, & f(x)\geq 0 \\ -f(x), & f(x)\leq 0 \end{cases}$

$0\leq f_+(x)\leq |f(x)|$ сход. в D
$0\leq f_-(x)\leq |f(x)|$
сход

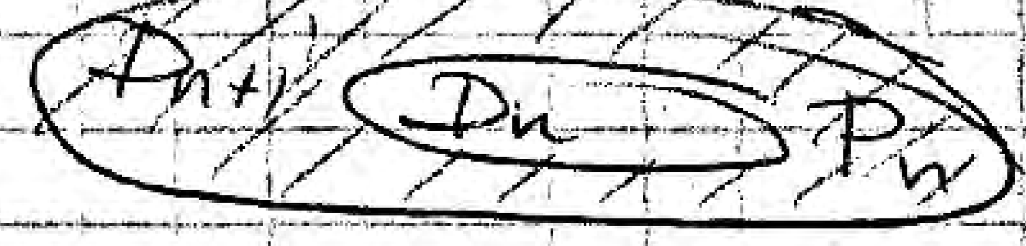
{Т.2} $\Rightarrow \int_D f_\pm(x)\,dx$ сход

$\Rightarrow$ сход $\int_D f_+(x)-f_-(x)\,dx=\int_D f(x)dx$, гсд
{линейность}

„⇓" $\int_D f(x)dx$ сход, а $\int_D |f(x)|dx$ расх.

$\nexists$ в силу Т.1 $\forall\{D_n\}$, исчерп. D
$\int_{D_n} |f(x)|dx$ неогр. (опред. сходимости)
монотонна $\Rightarrow$ неуб. $\to+\infty$

Построим $\{D_n\}$, исчерп. D:
$$\int_{D_{n+1}}|f(x)|dx\geq 3\int_{D_n}|f(x)|dx+2n+4, \quad \forall n$$



$D_{n+1}=D_n\cup(D_{n+1}\setminus D_n)=$
$=D_n\cup P_n$

$$\int_{D_{n+1}}|f(x)|dx=\int_{D_n}|f(x)|dx+\int_{P_n}|f(x)|dx\geq$$
$$\geq \not{3}^{2}\int_{D_n}|f(x)|dx+2n+4 \quad \forall n$$

$$\Leftrightarrow \int_{P_n}|f(x)|dx\geq 2\int_{D_n}|f(x)|dx+2n+4 \Leftrightarrow$$

$f_+(x)+f_-(x)=$
$=|f(x)|$

$$\Leftrightarrow \int_{P_n}f_+(x)dx+\int_{P_n}f_-(x)dx\geq 2\int_{D_n}|f(x)|dx+2n+4$$

Пусть
$$\int_{P_n}f_+(x)dx\geq \int_{P_n}f_-(x)dx \Rightarrow$$

70

$$\int_{\overline{P}_n} f_+(x)\,dx \geq \int_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n+2$$

Заменим интеграл в левой части на нижнюю интегральную сумму

$\exists$ такое разбиение $\overline{P}_n = \bigcup_{j=1}^{r} P_{n_j}$

$$0 \leq \int_{\overline{P}_n} f_+(x)\,dx - \sum_{j=1}^{r} m_j \underbrace{\Delta\sigma_j}_{\text{площадь } \overline{P}_{n_j}} \leq 1$$

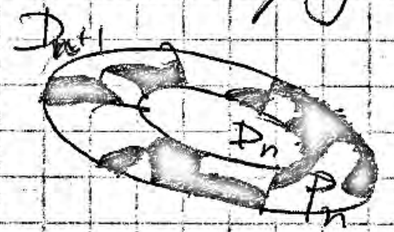
всегда можно сделать

m_j: $\inf_{\overline{P}_{n_j}} f_+$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} m_j \Delta\sigma_j \geq \int_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n+1$$

Оставим те слаг, в кот. $m_j > 0$:
тем самым, в разбиении $\overline{P}_n$ остались только те $\overline{P}_{n_j}$, в кот. $m_j > 0$;

объединение оставшихся частичных областей разбиения: $\tilde{P}_n$



$\leftarrow m_j > 0$

Та нижняя интегральная сумма в левой части — это нижняя инт. сумма для $f(x)$ в $\tilde{P}_n$

$$\int_{\overline{P}_n} f(x)\,dx \geq \sum_{j=1}^{r} m_j \Delta\sigma_j$$

$$\Rightarrow \int_{\overline{P}_n} f(x)\,dx \geq \int_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n+1$$

$$\Leftrightarrow \int_{\overline{\tilde{P}}_n} f(x)\,dx - \int_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx \geq n+1$$

$\parallel$

$-\int_{\overline{D}_n} f(x)\,dx$

$f(x) \geq -|f(x)|$

$$\Rightarrow \int_{\overline{\tilde{P}_n \cup D_n}} f(x)\,dx \geq n+1$$

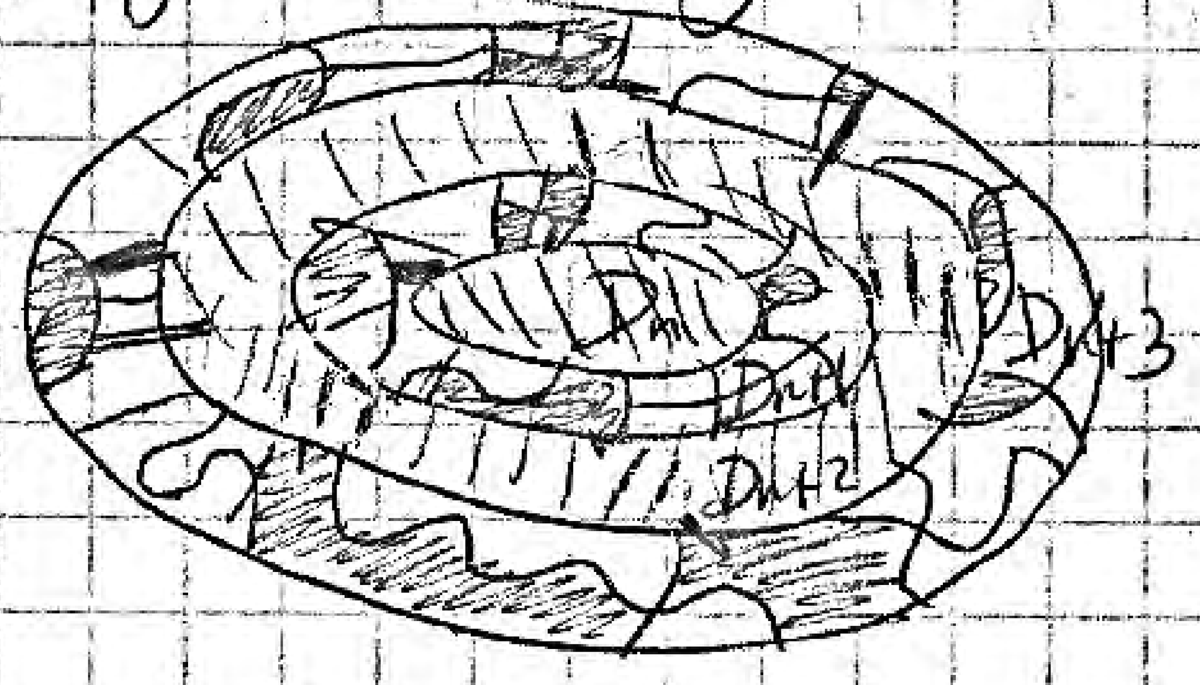
Если, наоборот $\int_{\overline{P}_n} f_-\,dx > \int_{\overline{P}_n} f_+\,dx$,

то $\int_{\overline{\tilde{P}_n \cup D_n}} f(x)\,dx \leq -n-1$

Таким образом

$$\left| \int_{\overline{\tilde{P}_n \cup D_n}} f(x) \right| \geq n+1$$

Раздваив через 2 шага!



$$\underbrace{\overline{\tilde P_n \cup D_n}}_{D_n^*} \subset \underbrace{\overline{\tilde P_{n+2} \cup P_{n+2}}}_{D_{n+2}^*}$$

Тогда исчерпывает D

Чтобы были связными, соединим узкими каналами (нельзя в одномерном случае!)

Области D_1^*, D_3^*, D_5^* — исчерпывают D без 1 св-ва — они могут быть несвязными.

Для $\forall n \in \mathbb{N}$: дополним D_n^* "каналами" K_n: $D_n^* \cup K_n$ — связное и так, чтобы

$$\left|\int_{K_n} f(x)dx\right| \le 1$$

Пусть $M = \max_{\tilde P_n} |f(x)|$ и площадь $\overline{K_n} < \frac{1}{M}$

$f(x)$

$\Rightarrow$ построена посл. $\{D_n^* \cup K_n\}_{n=2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, кот. исчерпывает D

$$\Rightarrow \left|\int_{D_n^* \cup K_n} f(x)dx\right| \ge n \Rightarrow \int_D f(x)dx \text{ расх.} \Rightarrow ⊠, \text{ ч.т.д.}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$[a, +\infty)$ исчерпывается мн-вами $[a, R]$, $\forall R > a$

4° Интегралы в смысле главного значения:

$$\iint_D f(x)dx$$

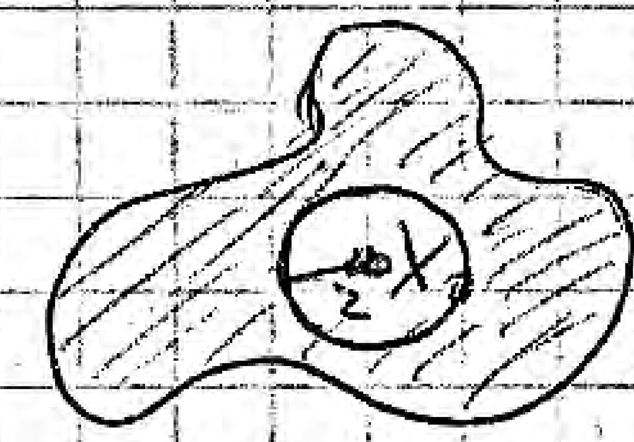
Рассм. $\iint_{D \cap \{x_1^2 + x_2^2 \le R^2\}} f(x)dx = I_R$ (собственные) исчерпываем спец. образом

$I_R \xrightarrow[R\to+\infty]{} I$

Если $\exists\, I_R \xrightarrow[R\to+\infty]{} I$, то инт. сход. в смысле главного знач. и

$$I = v.p. \iint_D f(x)dx$$

$$v.p. \iint_D f(x)dx =$$



$$= \lim_{r \to 0+} \iint_{D \setminus \{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \le r^2\}} f(x)dX$$

§7 Криволинейные интегралы

1° Определение

Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана кривая L — параметризуема:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$$

, где $\varphi(t), \psi(t)$ - непр.

Без самопересечений и самоналожений

Пусть она незамкнута, т.е. $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \neq (\varphi(\beta), \psi(\beta))$

Пусть в каждой т. L задана ф-ция $f(x,y)$ — непр. вдоль этой кривой:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : M_1, M_2 \in L : \rho(M_1, M_2) < \delta$

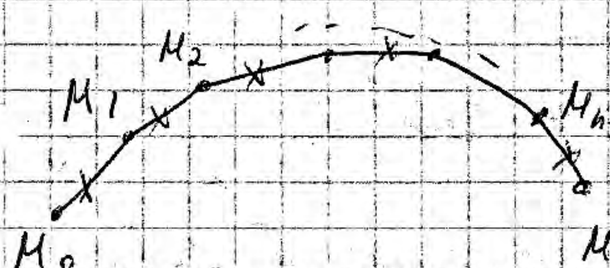
$\Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$

$f(x,y)$ равн. непр на L

Рассм. $\forall$ разб. $[\alpha, \beta]$ $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$,

кот. соотв. разб. L на дуги

$L: M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0)), M_1(\varphi(t_1), \psi(t_1))$



Будем считать, что $\forall$ дуга разб. имеет длину (спрямляемая)

$\Delta l_k = M_{k-1} M_k$

Кривер. диффер. $\Rightarrow$ спрямляемая

На каждой дуге $M_{k-1} M_k$ выбираем промежуточную точку $N_k(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))$,

$t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$

$$\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} f(N_k) \Delta l_k, \quad \sigma_1(f) = \sum_{k=1}^{n} f(N_k) \Delta x_k,$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$

$$\sigma_2(f) = \sum_{k=1}^{n} f(N_k) \Delta y_k, \quad \Delta y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1})$$

Опр. Сумма $\sigma(f)$ имеет предел при $\max$ диам. разб. $\to 0$, равный I, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\forall$ разб. дуги L с диам $\Delta = \max_{1 \le k \le n} \Delta l_k$: $\Delta < \delta$ $\forall$ выбора точек N_k $|\sigma(f) - I| < \varepsilon$

I — криволинейный интеграл I рода

$$I \overset{\text{def}}{=} \int_L f(x,y)\, dl$$

Криволин. инт. II рода

$$I_1 \overset{def}{=} \int_L f(x,y)\,dx \qquad I_2 \overset{def}{=} \int_L f(x,y)\,dy$$

Опр Общий криволин инт. II рода

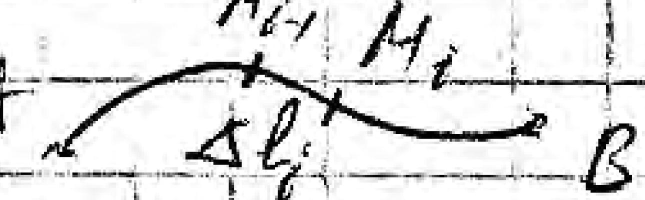
$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \overset{def}{=} \int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy$$

работа при перемещ. поле с коорд $P(x,y)$ $Q(x,y)$

Зам: Криволин. инт. I рода не зависит от направления обхода L

$A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta l_i$$



Криволин инт II рода

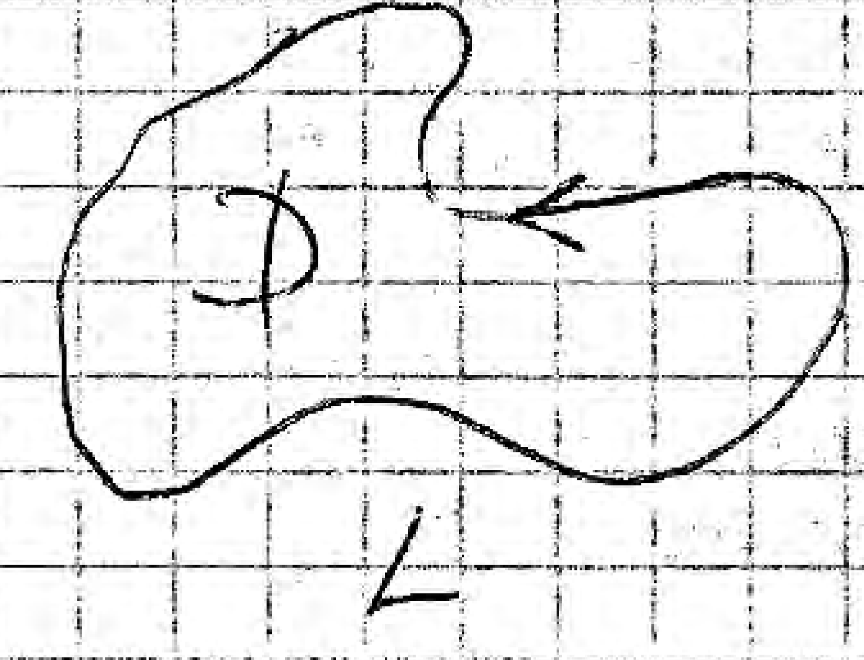
$$\sigma_1(P) = \sum_{i=1}^{n} P(N_i)\Delta x_i \qquad \Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$$

Если кривая L проходится в обр напр, (от B к A), то любой криволин инт. II рода меняет знак на противопол.

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \qquad \oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Если контур L (кривая L) замкнут ($A=B$) то пишется

$\oint$ направление обхода контура положит.



Положит. обх. (обход) D - слева

§2 Условия существования криволин инт.

В определениях - кривая L параметризуема (φ, ψ, χ - непр.)

кривая L спрямляема

интегр функц непр вдоль L

Предположим: кривая L - гладкая, т.е $\varphi(t), \psi(t)$, ~~$\chi(t)$~~ непр. дифф.

Все точки кривой L - неособые, т.е

$$[\varphi'(t)]^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$$

Теор 1 В данных предположениях криволин инт. I и II родов $\exists$ и вычисляются по формулам:

I р: $$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$$

II р: $$\int_L P(x,y)dx = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\,dt$$

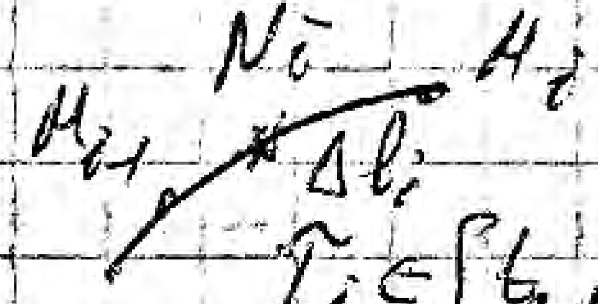
$$\int_L Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\,dt$$

Д-во. 1) Все инт. в правых частях ∃, т.к. инт. от непр. ф-ции параметра t

2) Покажем, что пределами инт. сумм криволин. инт. в левых частях при диам. разб. $\to 0$ явл. ~~числ~~ числ. знач. соотв. инт. в правых частях.

Введём разбиение кривой L: $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$

Тогда для первого интеграла:



$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \Delta l_i = \qquad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(\xi))^2 + (\psi'(\xi))^2}\, d\xi$$

Так же для 2-ого интеграла

$$\sigma_1(P) = \sum_{i=1}^{n} P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(\xi) d\xi$$

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$$

Составим разность:

$$\sigma(f) - \langle \text{инт в пр. части} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{(\varphi'(\xi))^2 + (\psi'(\xi))^2}\, d\xi - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{[f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))]}_{\text{разность знач. } f(\varphi(t), \psi(t))} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$$ д-ть при достаточно мал.

Пусть диаметр разб. крив. $L \to 0$

$\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$. Покажем, что величина $\Rightarrow$

$$\delta = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i \to 0$$

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(\xi))^2 + (\psi'(\xi))^2}\, d\xi$$

Если во всех точках L: $(\varphi'(\xi))^2 + (\psi'(\xi))^2 \neq 0$

и $\varphi'(t), \psi'(t)$ непр. дифф на L

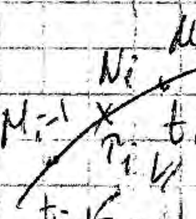
$\Rightarrow m = \min\limits_{\alpha \le t \le \beta} ((\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2) > 0$ в силу непр.

огр. в силу т. В и точная (нижняя грань достигается и $\neq 0$ (иначе))

$\Rightarrow \Delta l_i \geq \sqrt{m}\, \Delta t_i$

$\Rightarrow$ ~~Δl_i~~ $\max\limits_i \Delta l_i \to 0 \Rightarrow \max\limits_i \Delta t_i \to 0$

т.к. $\max\limits_i \Delta t_i \le \frac{1}{\sqrt{m}} \max\limits_i \Delta l_i$



в силу равномерной непр. φ-ции $f(\varphi(t), \psi(t))$ на $[\alpha \le t \le \beta]$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall$ отрезка $[a,b]$

$t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] : |t_1 - t_2| < \delta$

$\Rightarrow |f(\varphi(t_1), \psi(t_1)) - f(\varphi(t_2), \psi(t_2))| < \varepsilon$

$t_{i-1} \le t \le t_i$, $\tau_i \in [t_1 - t_2]$

Если диаметр $\delta = \max_i \Delta t_i$ мал

$$|\sigma(f) - \langle \dots \rangle| \le \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\dots \right) \sqrt{\dots}\, dt \right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))| \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt <$$

$|f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))| < \varepsilon$

$$< \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int \sqrt{\dots}\, dt = \varepsilon \cdot \langle \text{length}, L \rangle = \varepsilon |L|$$

длина гл. дуги

Пр: $\sigma_1(P) - \langle \text{инт вир. } z \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \cdot$

$\cdot \varphi'(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt =$

$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\Phi(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - \Phi(\varphi(t), \psi(t))] \cdot$

$\cdot \varphi'(t) dt$

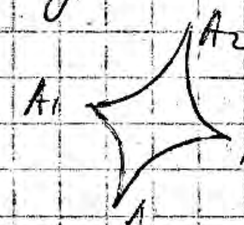
Аналогично $|\sigma_1(P) - \langle \dots \rangle| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\Phi(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) -$

$- \Phi(\varphi(t), \psi(t))| \cdot |\varphi'(t)| dt < \varepsilon \cdot \max_{\alpha \le t \le \beta} |\varphi'(t)|$

$\varepsilon \cdot \underbrace{(\beta - \alpha)}_{\text{const}}$

Зам 1 Пер 1 справедлива и для простр. кривых L

Зам 2 Пер 1 обобщается на случай кусочно-гладких L ($=$ непр. кривая, $=$ объединение конечного числа гладких участков не имеющих общих внутр. точек)



$$\int_L f dl = \sum_{k=1}^{N} \int_{L_k} f dl$$

Зам 3 Криволин. инт. обладают теми же св-вами, что и обычные инт. Римана. (аддитивность, линейность, оценки для инт — (модуль), огр. о ф)

Глава IV Поверхностные интегралы

(§9) Понятие поверхности

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, обл. $G \subset \mathbb{R}^2$ (76)

Опр Отображение $f: G \to \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2)$ наз. гомеоморфизмом, если:

1) оно взаимнооднозначно (а, значит, у него есть обратное f^{-1})

2) f, f^{-1} непр: любая фундам. посл-ть точек $\{M_k\} \subset G \mapsto$ фунд. посл. точек $\{f(M_k)\} \subset f(G)$

$f(G)$ - образ обл. G.

$\forall$ фунд. посл. $\{N_k\} \subset f(G) \xrightarrow{f^{-1}}$ фунд.

посл. $\{f^{-1}(N_k)\} \subset G$

Пример. Ф-ция $z = z(x,y)$ непр. в обл. G, она задает гомеоморфизм между G и мн-вом точек $\mathbb{R}^3$ $\{(x, y, z(x,y))\}$

$$\{(x_k, y_k)\} \text{ фунд} \Leftrightarrow \{(x_k, y_k, z(x_k,y_k))\} \text{ фунд.}$$

Опр. ~~Поверхность~~ Мн-во наз. элементарной поверхностью, если оно явл. образом нек. открытого круга $G \subset \mathbb{R}^2$ при гомеоморфизме $f: G \to f(G)$

Опр. ~~Поверхность~~ мн-во в $\mathbb{R}^3$ наз. простой поверхностью, если
1) она связна
2) ~~каждая окр.~~ для каждой т. этого мн-ва ~~поверхности~~ $\exists$ окрест., явл. элементарной поверхностью.

Мн-во $(x, y, z(x,y))$ - "график" непр. ф-ции

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Сфера: $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\cos\psi$, $z = R\sin\psi$

$$(\varphi, \psi) \in [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2]$$

$\Downarrow$ сфера

Опр: Отображение простой пов-ти G в $\mathbb{R}^3$ наз. локально-гомеоморфным, если $\forall M \in G$ $\exists$ окр., кот. гомеоморфно отображается на свой образ.

Опр. Мн-во $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ наз. общей поверхностью, если оно явл. образом простой пов. при лок. гомеом. отображении.

круг $\equiv$ шар

$$\Phi \in \mathbb{R}^3 \xleftarrow{f} G \subset \mathbb{R}^2$$

откр. круг.

Регулярные поверхности

Опр. $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ наз. k раз диф-мой пов-тью, если $\forall M \in \Phi$ $\exists$ окрест. т. M, в кот. пов-ть допускает параметризацию:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \text{ где } (u,v) \in G \text{ - прост. обл в } \mathbb{R}^2,$$

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ явл. k раз диф-мы в G

Если $k = 1$: пов-ть Φ наз. гладкая

Данная параметризация точек Φ явл. локальной

Опр. Точка $M_0 \in \Phi$ (k раз-диф.) наз. обыкновенной (регулярной, неособой), если в её окр-ти можно ввести параметризацию так, что:

$$(*)\quad \operatorname{rg}\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2$$

строки не пропорциональны

? k раз дифф. пов-ть Φ без особых точек

Теорема 1 Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – прост. обл. и пусть на G заданы $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ $((u,v) \subset G)$, кот. k раз непр.-дифф и $rg(\Psi) = 2$ в каждой точке G. Тогда соотношения

$$(V)\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

определяют мн-во $\Phi \in \mathbb{R}^3$, кот. явл. k раз диф-мой общей пов-тью без особых точек.

Д-во (V) опр-ют нек. отображение прост. обл. G в $\Phi \in \mathbb{R}^3$

Надо д-ть, что это отображение явл. лок. гомеоморфизмом

f – непрерывное (прямое отобр.)

По опр. ранга, в (V) $\exists$ минор 2-ого порядка отличный от 0 (Пусть это минор в 1 и 2 столбцах)

$$(VV)\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

← Якобиан преобразования построенной по ф-циям

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Рассм. $\forall$ т. $M(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ и пусть в нек. её окр-ти $(VV) \neq 0$

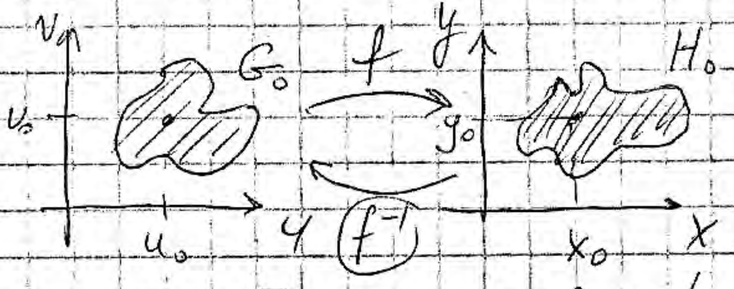
Если в т. $\neq 0$, то в силу непр. и в нек. окр-ти $\neq 0$

Применим к системе $(\star)\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ теорему о разрешимости (т. о неявно заданной) ф-ции. В силу этой т. существует k-раз диф-мая ф-ция

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

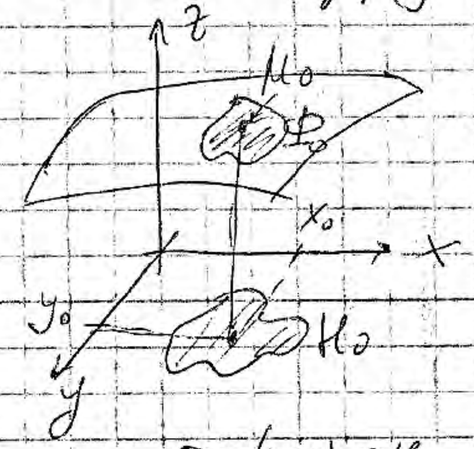
кот. удовл. $(\star)$

Эти 2 системы задают 2 взаимно обратных ~~однозначных~~ отображения нек. окр. т. $(u_0, v_0) \in G$



$\exists$ по т. о неявной ф-ции.

$\Rightarrow f$ – гомеоморфизм (локальный)



Рассм. $\forall$ $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) = \\ = z(u(x,y), v(x,y)) \end{cases}$$

$\forall (u,v) \in G_0 \rightleftarrows$

$\rightleftarrows (x,y) \in H_0 \to (x,y,z) \to \Phi_0$

$\exists$ т.к. можем убрать посл. координату

78

$\Rightarrow$ Суперпозиция этих отображений и задает лок. гомеоморфизм $G \to \Phi$

Зам. Ч.д-ва т. 1 $\Rightarrow \forall M_0 \in \Phi \ \exists$ окр. Φ_0 кот. взаимнооднозначно проектируется на коорд. плоскость

Векторное описание пов-ти

Пл-ть в R^3

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ гладкие ф-ции

$\begin{cases} x = \alpha_1 u + \beta_1 v + \delta_1 \\ y = \alpha_2 u + \beta_2 v + \delta_2 \\ z = \alpha_3 u + \beta_3 v + \delta_3 \end{cases}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

векторы, $\parallel$ этой пл-ти, неколлинеарные

Они должны быть неколлинеарны $\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}, \ rg = 2$$

Рассм. теперь кривую параметрически

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}(u,v)$

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\forall M_0(x_0, y_0, z_0)$

$\Updownarrow$

$N_0(u_0, v_0)$

Рассм. т., в кот. $u_0 = const$

$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ параметризована 1 параметром v

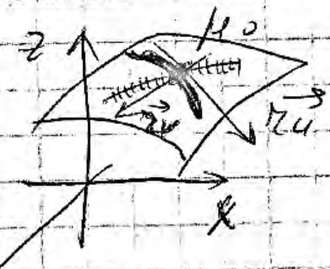
Внутри криволинейные координаты на Φ

Сфера радиуса R

$\begin{cases} x = R\cos u \cos v \\ y = R \sin u \cos v \\ z = R \sin v \end{cases}$ при фикс v - параллель, фикс u - меридиан

$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} \leftarrow \vec{r}_u = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\}$ при фикс $v = v_0$

$\leftarrow \vec{r}_v = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\}$ при фикс $u = u_0$

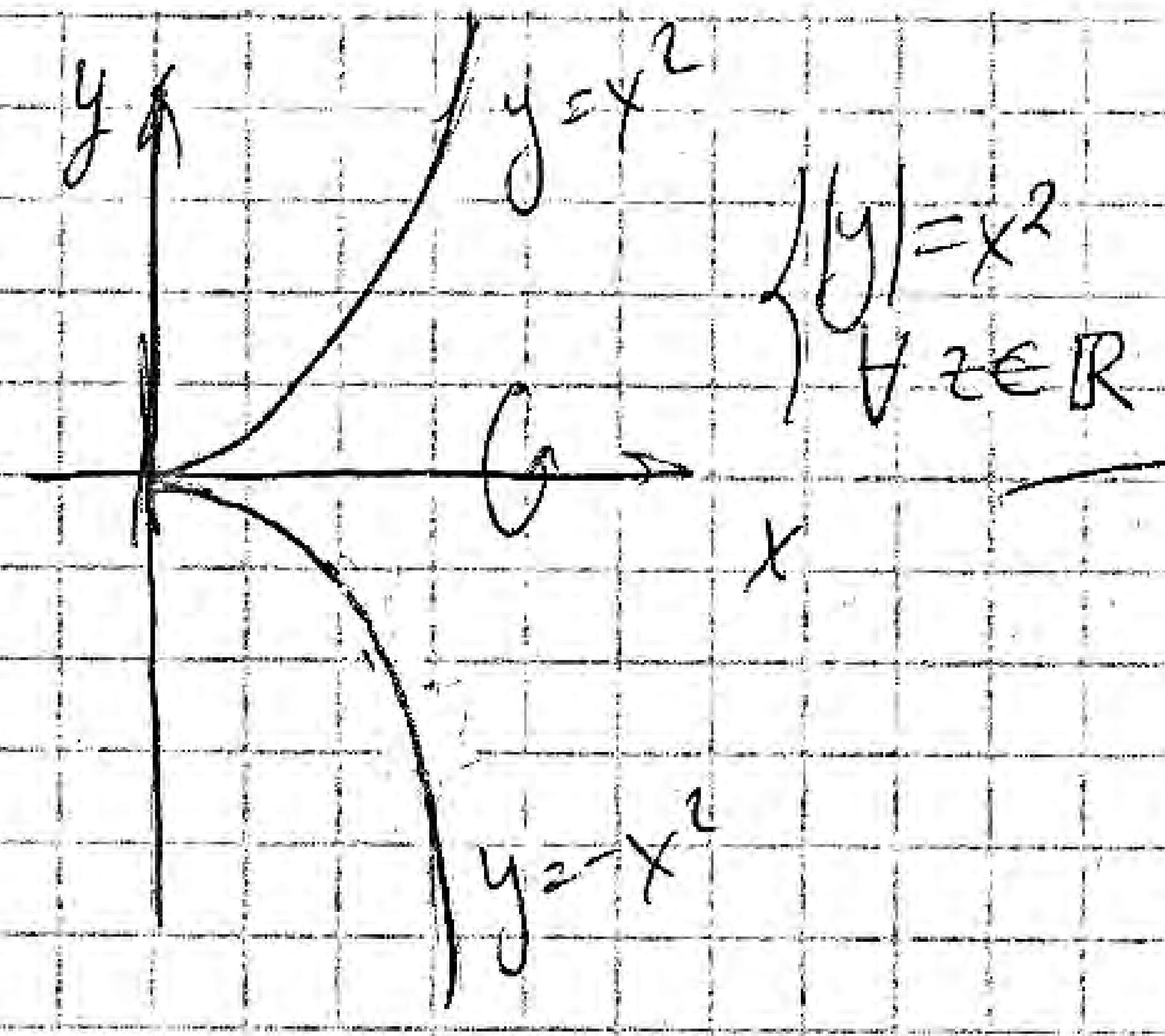


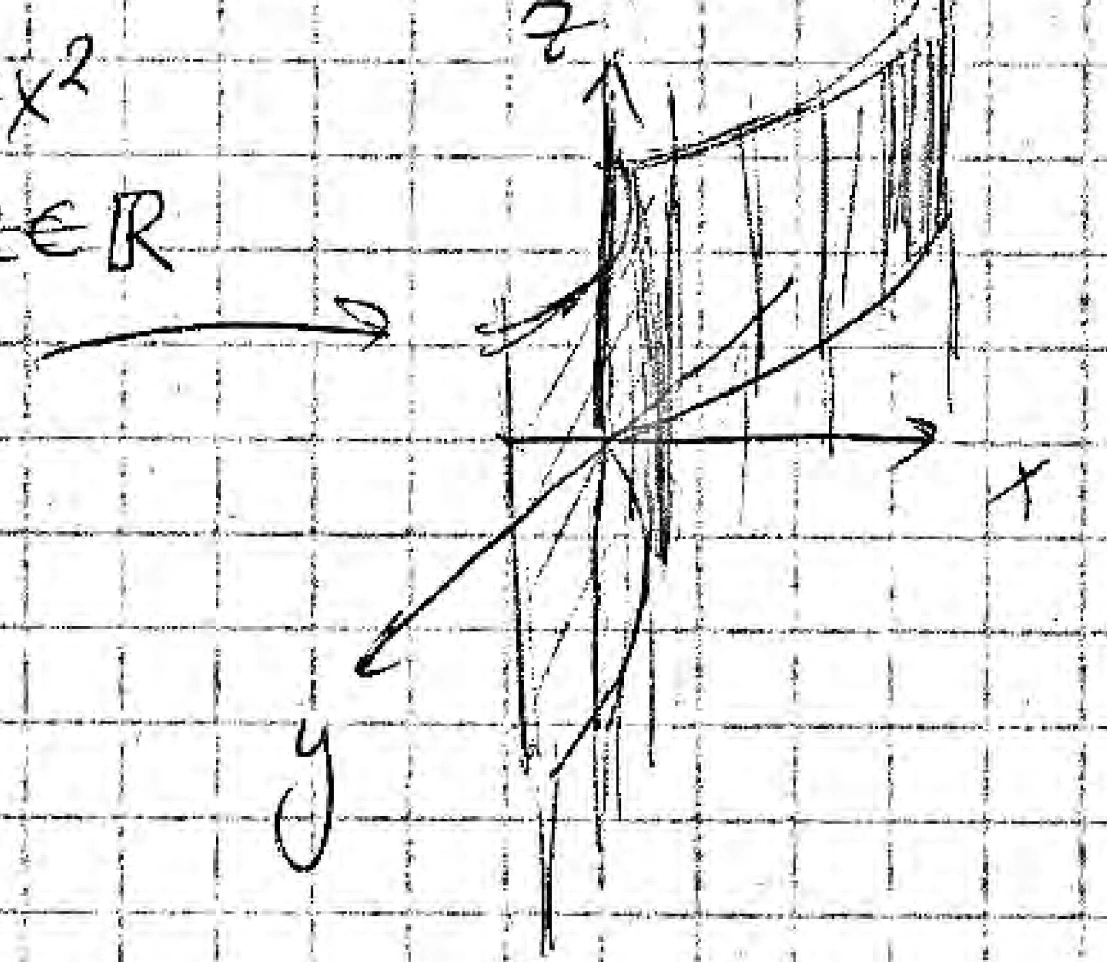
$\vec{r}_u$ - касат вект к $\overset{\frown}{\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)}$

$\vec{r}_v$ - касат вект к $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$

~~Эти векторы, неколлинеарны, т.к. $rg = 2$, только M_0 особая~~

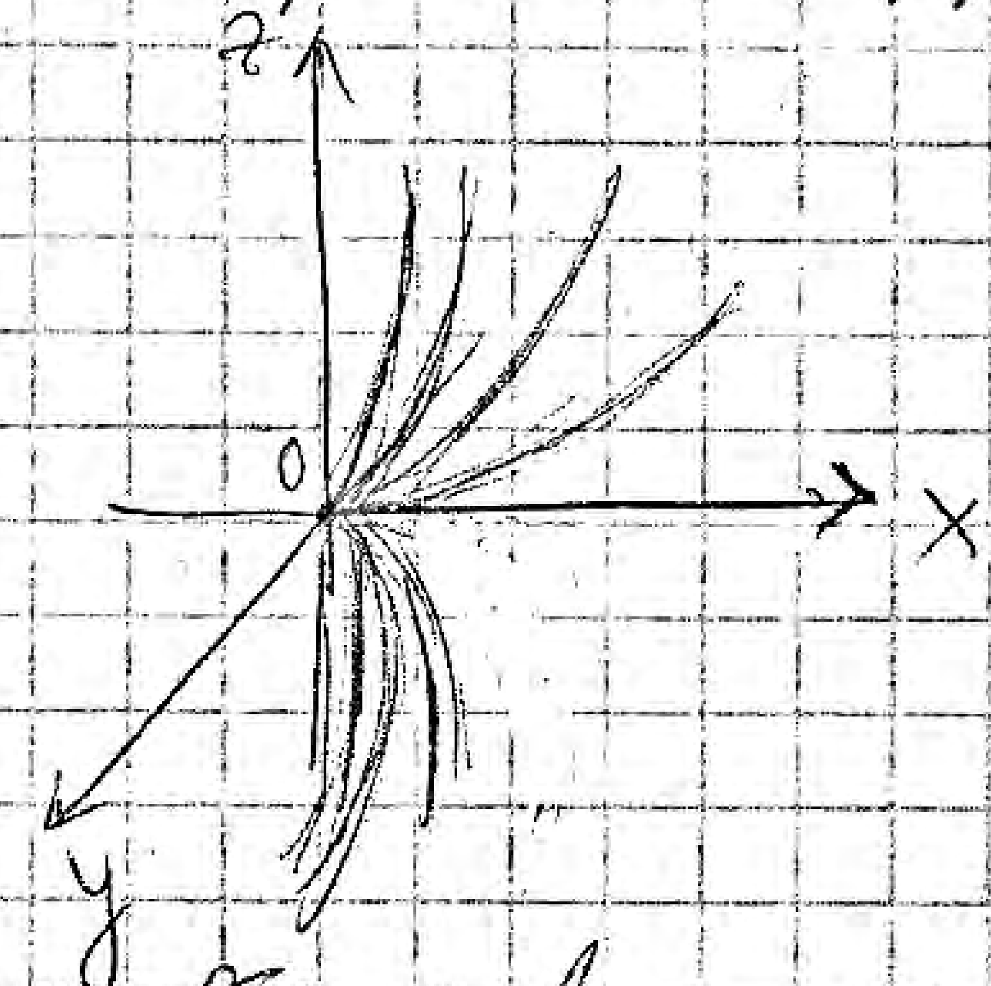
Если M_0 - особая $\Rightarrow rg = 2 \Rightarrow$ векторы неколлинеарны $\Rightarrow$ в т. $M_0 \ \exists$ пл-ть (проходящая через M_0), $\parallel \vec{r}_u, \vec{r}_v$ = касат. пл-ть к Φ в т. M_0





все т. $(0,0,z)$ — особые

$\begin{cases} |y| = x^2 \\ \text{вращение вокруг } Ox \end{cases}$ точка $(0,0,0)$ особая



Если вект. произв. $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq 0$ (т.к. неколлин. и $\vec{r}_u \neq 0$ и $\vec{r}_v \neq 0$)

— вектор нормали к п-ти Φ

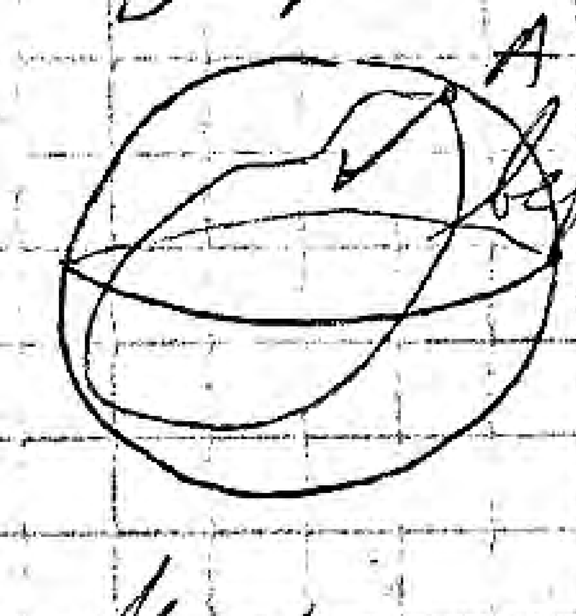
$\vec{N}(u,v) = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ в $\forall$ т. пов-ти Φ $\exists$ вектор нормали

$\vec{n}(u,v) = \frac{1}{|\vec{N}(u,v)|} \vec{N}(u,v)$

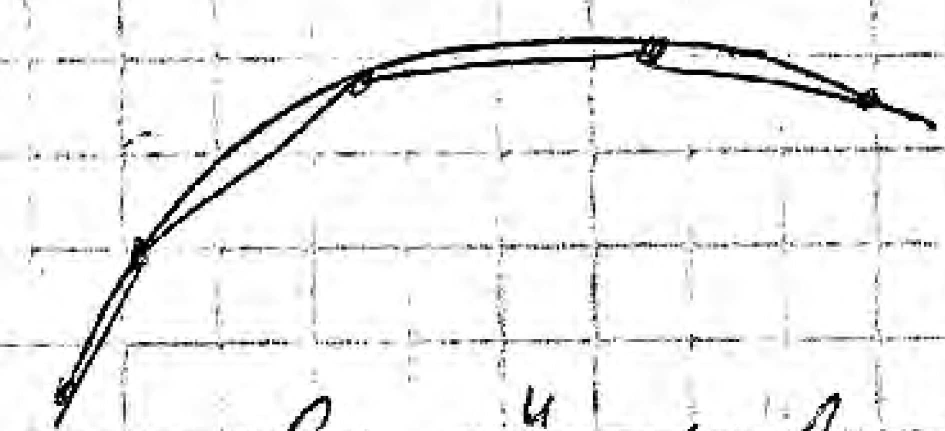
На пов-ти Φ имеется векторное поле нормалей

Из т. 1 $\Rightarrow$ в окр-ти люб. т. пов-ти Φ ф-ция $\vec{n}(u,v)$ явл. непр. (непр в окр каждой т.) (но не на всей пов-ти Φ)

Опр Если на всей пов-ти Φ $\exists$ непр. поле нормалей, то пов-ть Φ наз. двусторонней

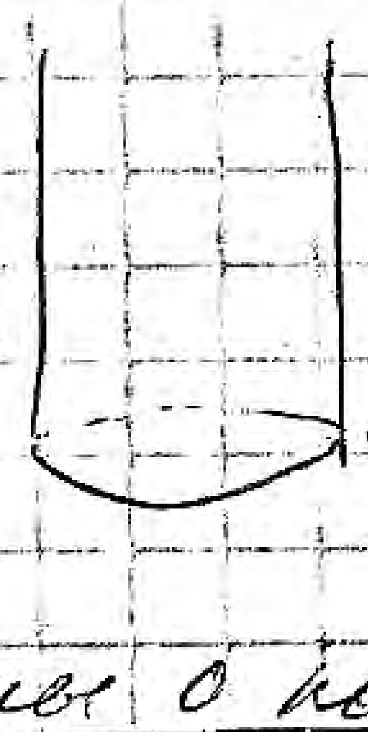


Например, лист Мёбиуса - не явл двустор



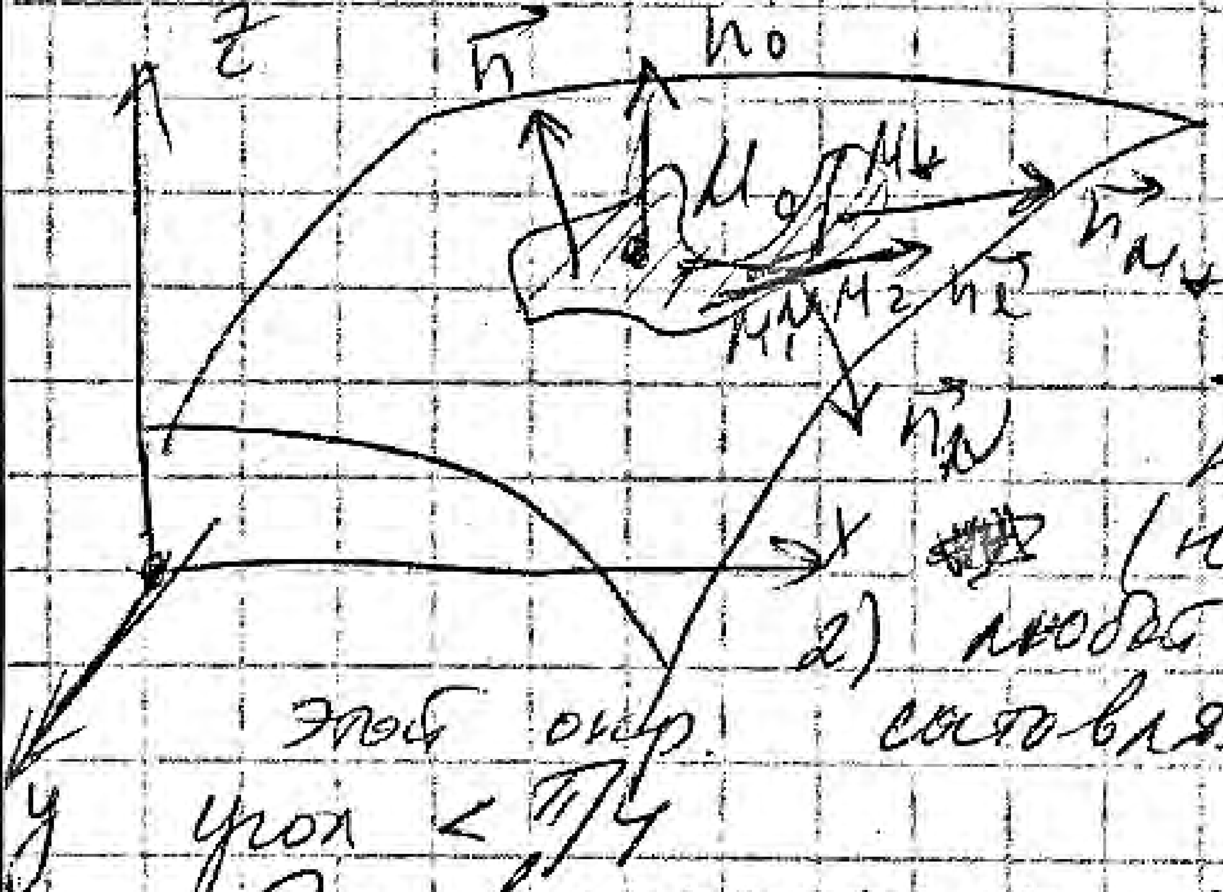
Сапог Шварца

Пов-ть многогранника сколь угодно большая.



Вспомогательные леммы о пов-ти

Лемма 1 Пусть т. $M_0 \in \Phi$ - неособая т. гладкой пов-ти Φ. Тогда $\exists$ окр. этой т. M_0, кот. однозначно проектируется на любую касат пл-ть, проведённую к точкам этой окр. (80)



Д-во: рассм. такую окр. т. M_0, кот.

1) однозначно проектируется на одну из коорд. пл-тей (например Oxy)

2) любой вектор нормали к т. этой окр. составляет с вектором $\vec{n}(M_0) = \vec{n}_0$ угол $< \pi/4$

Это возможно, т.к. поле вект. норм. явл. непр.

Пусть есть т. на пл-ти, в пределах этой окр, у кот. $\exists\ \vec{n}_{M_4}$ ~~каждую~~ и сост. ему касат. пл-ть ~~однозначного проекта~~ в M_4.

в ~~пределах~~ этой окр есть 2 точки M_1 M_2 кот. при проектировании на эту касат. пл-ть дают одну проекцию

$\Rightarrow$ вектор $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{n}_{M_4}$

т.к. $M_1M_2 \perp$ этой пл-ти

Рассм. кривую на этой поверхности, проходящей через M_1 M_2. Т.к. поверхност. Φ гладкая $\Rightarrow$ кривая — гладкая. В силу т. Лагранжа $\exists$ т. на этой кривой в кот. касат. $\parallel (M_1M_2)$ (Пусть в т. N).

~~это с нормали~~ $\vec{n}_N \perp$ это касат.

$\Rightarrow \vec{n}_M \perp \vec{n}_N$ ~~т.к.~~ $\Rightarrow$ противоречие т.к. между любым вект. $\vec{n}_M$ этой окр. и вект. $\vec{n}_{M_0}$ угол $< \pi/4$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{n}_M, \vec{n}_N}) < \pi/2$ противоречие, ч.т.д.

$\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ — касат. к пов-ти Φ

В каждой т. $\vec{r}_u \nparallel \vec{r}_v$

Опр: Пов-ть Φ назыв. полной, если любая фунд. посл-ть точек $\{M_n\} \subset \Phi$ сход. к точке на этой пов-ти

Опр. Размер части пов. $\tilde{\Phi}$ это $\sup\limits_{M_1, M_2 \in \tilde{\Phi}} |M_1M_2|$

Если размер $< \delta \Rightarrow$ это означает, что данную часть пов-ти можно поместить в нек. шар ~~радиуса~~ диаметра δ

Лемма 2. Пусть Φ — гладкая полная пов-ть без особых точек; эта пов-ть — ограничена. Тогда $\exists\ \delta > 0\ !\ \forall$ часть пов-ти Φ размера $< \delta$ однозначно проектируется на любую свою касат. пл-ть

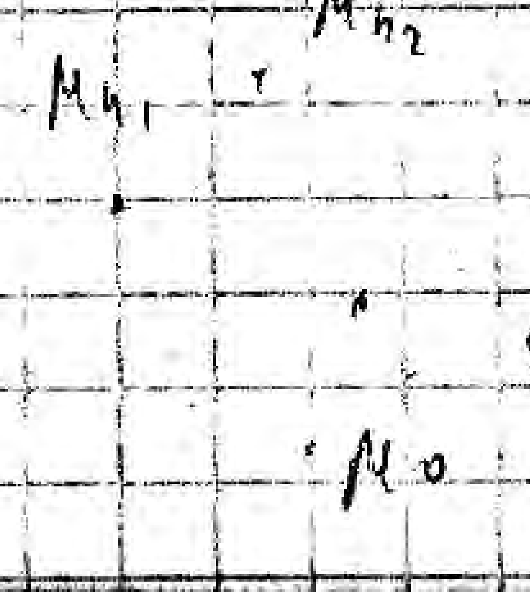
Д-во. От противного. Пусть $\forall\ \delta_n = \frac{1}{n}\ (n \in \mathbb{N})\ \exists$ такая окр т. $M_n \in \Phi$: Φ_n, кот. не удовл. усл. леммы 1

все части удовл. лемме 1

Рассм. $\{M_n\}$: — она огр.

(т.к. Φ огр.) $\Rightarrow \exists\ \{M_{n_k}\}$ явл. сход.

Т.к. пов-ть Φ полная, то $\lim \{M_{n_k}\} = M_0 \in \Phi$



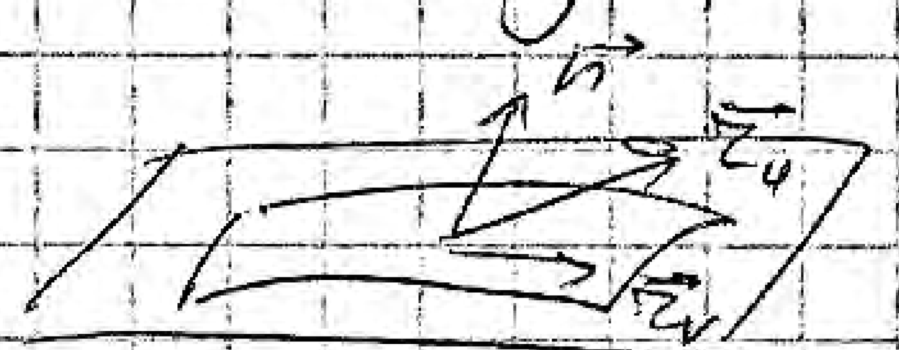
По опр. предела ~~всегда~~ $\forall$ окр. т. M_0 в кот. расположено бесн. много точек подпосл.

Согласно л. 1 у т. M_0 $\exists$ окр., кот. однозначно проектируется на $\forall$ свою касат. пл-ть
$\Rightarrow$ в этой окр. всегда найдётся т. $M_{n_{k_\nu}}$, кот. входит в эту окр. вместе с $\Phi_{n_{k_\nu}}$
— которая и удовл. л. 1 $\Rightarrow$ противоречие, чтд

Лемма 3 Пусть Φ — такая же, как в лемме 2. Тогда $\exists\, \delta > 0$: $\forall$ части пов-ти Φ однозначно проектируется на некоторую коорд. пл-ть разм $< \delta$

Д-во: Возьмём $\delta > 0$ из утв. л. 2
Рассм. все вект. ед. норм. к точкам части пов. разм $< \delta$.

Рассм. $\forall$ т. этой части пов. вместе с соотв. вект. норм. $\vec{n}$ (в силу л. 2 эта часть пов-ти однозначно проекц. на касат. пл-ть)



$\vec{n} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3\}$

Направляющие косинусы

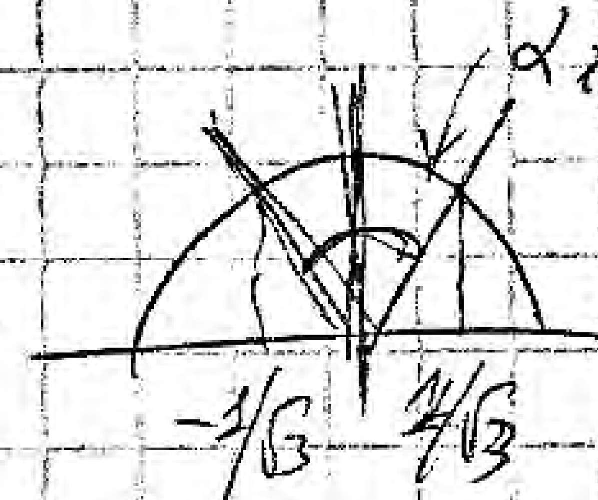
$|\vec{n}| = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$

Углы, кот. составляет вектор с осями координат.

$\Rightarrow \exists \cos^2\alpha_i \le \frac{1}{3}$

$\Rightarrow |\cos\alpha_i| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ Всегда можно ту проекцию, кот. получается при проектировании на касат. плоскость однозначно ~~проектируется~~ спроектировать на коорд. пл-ть $\perp \vec{e}_i$



Лемма 4 Пусть Φ — гладкая полная огр. без особых точек, двусторонняя пов-ть. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$: любая часть пов-ти Φ разм $< \delta$ удовл.:

$$\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = 1 - \alpha_\Phi, \quad |\alpha_\Phi| < \varepsilon$$

Д-во: Двусторонняя: на пов-ти Φ $\exists$ непр. поле норм., т.е.

$\vec{n}(M)$ — непрерывно на Φ

Т.к. поверхность полная и ограниченная, то $\vec{n}(M)$ равн. непр. на Φ.

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall M_1, M_2 \in \Phi\ |M_1 - M_2| < \delta$

$\Rightarrow |\vec{n}(M_1) - \vec{n}(M_2)| < \varepsilon$

$$|\vec{n}(M_1) - \vec{n}(M_2)|^2 = (\vec{n}(M_1), \vec{n}(M_1)) + (\vec{n}(M_2), \vec{n}(M_2)) - 2(\vec{n}(M_1), \vec{n}(M_2)) = 2 - 2\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) < \varepsilon_1^2$$

$$\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = 1 - (1 - \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})) = 1 - \underbrace{\tfrac{1}{2}|\vec{n}_1 - \vec{n}_2|^2}_{< \frac{1}{2}\varepsilon_1^2}$$

$$\alpha_\Phi = \frac{1}{2}|\vec{n}_1 - \vec{n}_2|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 \equiv \varepsilon$$

§ 10 Площадь пов-ти

1° Понятие площади пов-ти

Пусть Φ – гладкая полная огр двустор без особых точек

Разобьём пов. Φ на части $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ так, чтобы $\forall\ \Phi_i$ однозначно проектировалась на любую свою касат. пл-ть

Пусть δ_i – размер Φ_i и положим $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le N} \delta_i$

В каждой части Φ_i рассмотрим любую т. $M_i \in \Phi_i$ и спроектируем Φ_i на касат. пл-ть в т. M_j

Обозначим через σ_i – площадь этой пов. (проекции)

Опр. Пов. Φ квадрируема (имеет площадь $= \sigma$), если $\sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i$ имеет предел δ при $\Delta \to 0$, т.е.

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall$ разб. $\Phi = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Phi_i$

указ-вида и диаметра $\Delta < \delta$ анного

$\forall$ выбора т. $M_i \in \Phi_i$ $\left| \sum\limits_{i=1}^{N} \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon$

2° Квадрируемость гладких поверхностей

Теор. Любая гладкая огр. полная двустор. пов-ть без особых т. квадрируема

Д-во: (I) Пусть пов-ть Φ допускает единую параметризацию, т.е.

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} : G \to \Phi \in \mathbb{R}^3$$

(u,v) (гомеоморфизм)

т.к. пов-ть гладкая $\Rightarrow$ ф-ции непр-дифф

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ непр дифф в G

~~Покажем, что~~ $\Rightarrow \vec{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\}$

$\vec{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\}$ непр в G

Покажем, что пов-ть Φ имеет площадь

$$\sigma = \iint\limits_{G \text{ непр}} \left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right| du\,dv$$

Рассм $\forall\ \varepsilon > 0$ и построим $\delta > 0$:

1) $\forall$ части Φ размера $< \delta$ однозначно проектируется на люб. свою касат. пл-ть. (л.г)

2) $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 - \alpha_{\Phi_i}$

$M_1, M_2 \in$ части Φ : Φ_i

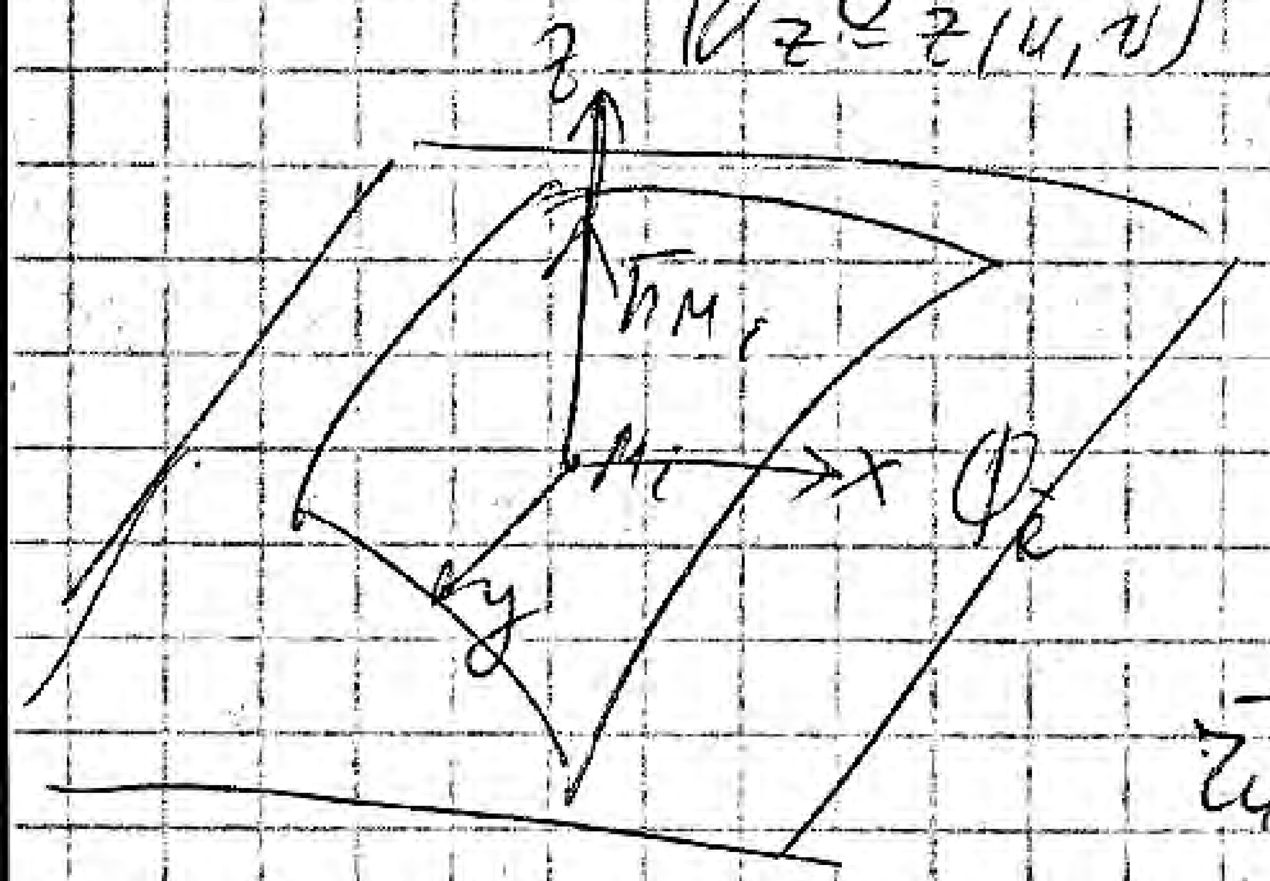
$$\begin{cases} 0 \le \alpha_{\Phi_i} < \frac{\varepsilon}{\sigma} \\ 0 \le \alpha < 1 \end{cases}$$

Разобьём Φ на конечное число частей

$\Phi = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_i$, Φ_i размера $< \delta$.

$\Phi_i \to G_i$, т.е. параметризуем части

$$\Phi_i: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in G_i$$



Введём локальную на Φ_i прямоуг. сист. коорд (правая)

$\vec r_u = \{x_u, y_u, z_u\}$

$\vec r_v = \{x_v, y_v, z_v\}$

$$[\bar r_u, \bar r_v] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right\} = \{A, B, C\}$$

↗ коорд. вект. нормали

arctg x+1
arctg x − π/2
π/2 − arctg x

В пределах части Φ: $C > 0$.

$\bar n_m$ — вектор нормали в люб. точке части; $\bar n_m \parallel \{A, B, C\}$

Площадь проекции на касат. пл-ть ($= \sigma_i$) = площ. проекц. на коорд пл-ть Oxy (локальную)

$$\Phi_i: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in G_i$$

Проекция на $z=0$: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

$$\sigma_i = \iint_{G_i} \underbrace{\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|}_{C} du\,dv$$

$$\iint_{G_i} |[\bar r_u, \bar r_v]|\, du\,dv = \iint_{G_i} \frac{|[\bar r_u, \bar r_v]|}{C}\, C\, du\,dv \ \textcircled{=}$$

$$\frac{C}{|[\bar r_u, \bar r_v]|} = \cos(\widehat{n_{M_i}, n_M}) \equiv \cos(\widehat{\bar n_m, O_z})$$

3-я коорд ~~норм~~ нормир-го вект норм (~~норм~~)

$$\textcircled{=} \ \{\text{Th о среднем}\} \ \frac{1}{\cos(\widehat{\bar n_{m_*}, O_z})} \iint_{G_i} C\,du\,dv = \frac{1}{\cos(\widehat{\bar n_{m_*}, O_z})} \cdot \sigma_i$$

$\sigma_i = \cos(n_{M_i}, \widehat{Oz}) \iint\limits_{G_i} |[\bar{r}_u, \bar{r}_v]|\, du\, dv$ {сложим по $i = 1, \dots, N$}

$\quad\wedge\!\backslash$

$\quad 1 - \alpha_{\Phi_i}$, где $|\alpha_{\Phi_i}| < \frac{\varepsilon}{\sigma}$

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{G_i} |[\bar{r}_u, \bar{r}_v]|\, du\, dv}_{\sigma} -$$

$$- \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \alpha_{\Phi_i} \iint\limits_{G_i} |[\bar{r}_u, \bar{r}_v]|\, du\, dv}_{|\ \ | < \varepsilon} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{N} \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon \Rightarrow$ верно

(II) Если Φ не допускает единой параметризации, то по лемме 3 Φ можно разб. на конечное число частей Φ_i, кажд. из кот. однозначно параметризуема на 1 из коорд. плоскостей

$\Rightarrow$ эту часть можно параметризовать

(На Oxy: $\Phi_i \to \Omega_k$: $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$)
$\Rightarrow$ можно параметризовать)

Зам Если Φ допуск. единую парам., то

$|[\bar{r}_u, \bar{r}_v]| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, где A, B, C – миноры 2-го пор. матр $\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$

$|[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\bar{a}, \hat{\bar{b}})$

$|(\bar{a}, \bar{b})| = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \hat{\bar{b}})$

$|[a, b]|^2 + |(\bar{a}, \bar{b})|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2$

$|[\bar{r}_u, \bar{r}_v]| = \sqrt{\underbrace{|\bar{r}_u|^2}_{E} \underbrace{|\bar{r}_v|^2}_{F} - \underbrace{(\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2}_{G^2}} =$

$= \sqrt{\det(\text{Матр. Грама})}$: $\begin{bmatrix} (\bar{r}_u, \bar{r}_u) & (\bar{r}_u, \bar{r}_v) \\ (\bar{r}_v, \bar{r}_u) & (\bar{r}_v, \bar{r}_v) \end{bmatrix}$

Зам Если пов. Φ кусочно-гладкая и кажд. её гладкая часть удовл. Th 1 то в силу аддитивности интеграла Φ квадр.

Зам Φ-ла зависит от параметризации.
Однако площадь и соотв. инт. не зависит от параметризации пов.

Можно перейти от 1 ~~пара~~ парам к др.

Можно объяснить геометрически!

... не зав. от параметризации
взяв др. парам.

§ 11 Поверхностные интегралы

1° Определения

✓ Пусть Φ – глад. двуст. полная огр. без особых точек пов-ть

✓ Пусть $\bar{n}(M)$ – непр. поле единичных нормалей к Φ

✓ Пусть на Φ задана ф-ция $u = f(M)$

Строим разб. пов. Φ на конечн. число квадр. частей $\Phi = \bigcup_{i=1}^{N} \Phi_i$

"Размер Φ_i" $\rightsquigarrow$ σ_i – площадь Φ_i

$\Delta \overset{def}{=} \max\limits_{1 \le i \le N} \sigma_i$ – диаметр разбиения

Вообще в любом Φ_i $M_i \in \Phi_i \to \bar{n}(M_i) = \{\cos X_i, \cos Y_i, \cos Z_i\}$

Интегральные суммы

$$\sigma_0(f) = \sum_{i=1}^{N} f(M_i)\sigma_i$$

$$\sigma_1(f) = \sum_{i=1}^{N} f(M_i)\cos X_i\,\sigma_i$$

$$\sigma_2(f) = \sum_{i=1}^{N} f(M_i)\cos Y_i\,\sigma_i$$

$$\sigma_3(f) = \sum_{i=1}^{N} f(M_i)\cos Z_i\,\sigma_i$$

Зам Площадь поверхности и интеграл, выражающий эту площадь, не зависят от параметризации пов-ти

Опр: Число I_0 (соотв. I_1, I_2, I_3) явл. пределами этих инт. сумм при $\Delta \to 0$ если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall$ разб. Φ на части $\Phi = \bigcup_{i=1}^{N} \Phi_i$ с диам $\Delta < \delta$ и $\forall$ выб. точек $M_i \in \Phi_i$

$$|\sigma_0(f) - I_0| < \varepsilon \quad (\text{соотв. } |\sigma_1(f) - I| < \varepsilon \ldots)$$

Поверхностный интеграл I рода:

$$I_0 = \iint_{\Phi} f(M)\,d\sigma$$

Пов. инт. II рода:

$$I_1 = \iint_{\Phi} f(M)\cos X\,d\sigma$$

Общий пов. инт II рода

$$\iint_{\Phi} (P(M)\cos X + Q(M)\cos Y + R(M)\cos Z)\,d\sigma$$

$I_2 = \ldots$ $I_3 = \ldots$

Зам: Пов инт I рода не зависит от выбора нормали $\bar{n}(M)$ (и от выбора стороны поверхности), а пов. инт II рода – меняют свой знак при смене стороны поверхности

Зам. Если на Φ выбрана сторона (т.е. выбрано определённое поле нормалей), то мод. пов. инт. II рода явл. по сути инт. I рода

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} \underbrace{f(M)\cos X}_{f_1(M)}\, d\sigma$$

§11 ~~Поверхностные интегралы~~

2° Существование

Теор 1 Пусть Φ — гладкая, полная, огр. двусторонняя без особых точек пов-ть. Пусть Φ допускает единую параметризацию

$$(x,y,z) \in \Phi: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$ где $(u,v) \in G$ — огр. замкн. обл.

Пусть $w = f(M)$ — непр. на Φ. Тогда пов. инт. I_0 $\exists$ и вычисляется по ф-ле:

$f(M) = f(x,y,z)$

$$\iint\limits_{\Phi} f(M)\, d\sigma = \iint\limits_{G} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{EF - G^2}\, du\, dv$$

$E = (\bar{r}_u, \bar{r}_u)$ $F = (\bar{r}_v, \bar{r}_v)$ $G = (\bar{r}_u, \bar{r}_v)$

Д-во. Интеграл в правой части $\exists$, т.к. f непр. вдоль пов-ти ($f = f(u,v)$) и корне-часть. (по-ку f (бл. прямая гладкая)) $\Rightarrow$ она тоже непр.

Рассм. мод. разб. $\Phi = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Phi_i$ $\forall$ выбра $M_i \in \Phi_i$ и диам. разб. $< \delta$. Запишем соотв. инт. сумму площадь $\Phi_i \longrightarrow \sigma_i$ — замкн. подобл.

$\sigma_0(f) = \sum\limits_{i=1}^{N} f(M_i)\,\overline{\sigma_i}\,(*)$ (пусть $M_i(x_i, y_i, z_i)$

$x_i = x(u_i, v_i)$ $y_i = y(u_i, v_i)$ $z_i = z(u_i, v_i)$)

$$(*) = \sum_{i=1}^{N} f(x(u_i,v_i), y(u_i,v_i), z(u_i,v_i)) \cdot \iint\limits_{G_i} \sqrt{EF-G^2}\, du\, dv$$

Разбиение пов-ти на части порождает разб. обл. $G = \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_i$ на части. В силу гомеоморфности параметризации при диаметре разб. пов-ти $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \Phi_i$, стремящемся к 0 ($\delta \to 0$) соотв. диаметр разб. δ_* разбиения обл. G, также $\to 0$ ($\delta_* \to 0$)

Составим и оценим разность:

$\sigma_0(f) - I_0$

$$\sigma_0(f)-I_0=\sum_{i=1}^{N}\underbrace{f(x(u_i,v_i),y_i,z_i)}_{f[u_i,v_i]}\iint\limits_{G_i}\sqrt{EF-G^2}\,du\,dv$$

G_i — ф-ла ср-знач.

$$-\sum_{i=1}^{N}\iint\limits_{G_i} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EF-G^2}\,du\,dv$$

$$=\sum_{i=1}^{N} f[u_i,v_i]\sqrt{EF-G^2}[\tilde u_i,\tilde v_i]\iint\limits_{G_i}du\,dv-I=$$

($\sqrt{EF-G^2}[\tilde u_i,\tilde v_i]$ — значение $\sqrt{EF-G^2}$ в т., соотв. парам. $(\tilde u_i,\tilde v_i)$; $\iint\limits_{G_i}du\,dv$ — площадь G_i $=\sigma_i^*$)

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{N} f[u_i,v_i]\sqrt{EF-G^2}[u_i,v_i]\sigma_i^*}_{\text{интегр. сумма для } I}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} f[u_i,v_i]\left(\sqrt{EF-G^2}[\tilde u_i,\tilde v_i]-\sqrt{EF-G^2}[u_i,v_i]\right)\sigma_i^*-I$$

$(u_i,v_i),(\tilde u_i,\tilde v_i)\in G_i$

Пусть $C_0>0$: $|f(M)|\le C_0$ $\forall M\in\Phi$. Пусть $|G|$ — площадь обл. G.

Тогда $\forall\,\varepsilon>0$ выберем $\delta>0$:

1) Разность $\left|\sum_{i=1}^{N} f[u_i,v_i]\sqrt{EF-G^2}[u_i,v_i]\sigma_i^*-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall$ разбиения обл. G на части с диаметром δ_1

2) $\left|\sqrt{EF-G^2}[\tilde u_i,\tilde v_i]-\sqrt{EF-G^2}[u_i,v_i]\right|<\frac{\varepsilon}{2C_0|G|}$

для $\rho((\tilde u_i,\tilde v_i),(u_i,v_i))<\delta_2$ (в силу равн. непр. ф-ции)

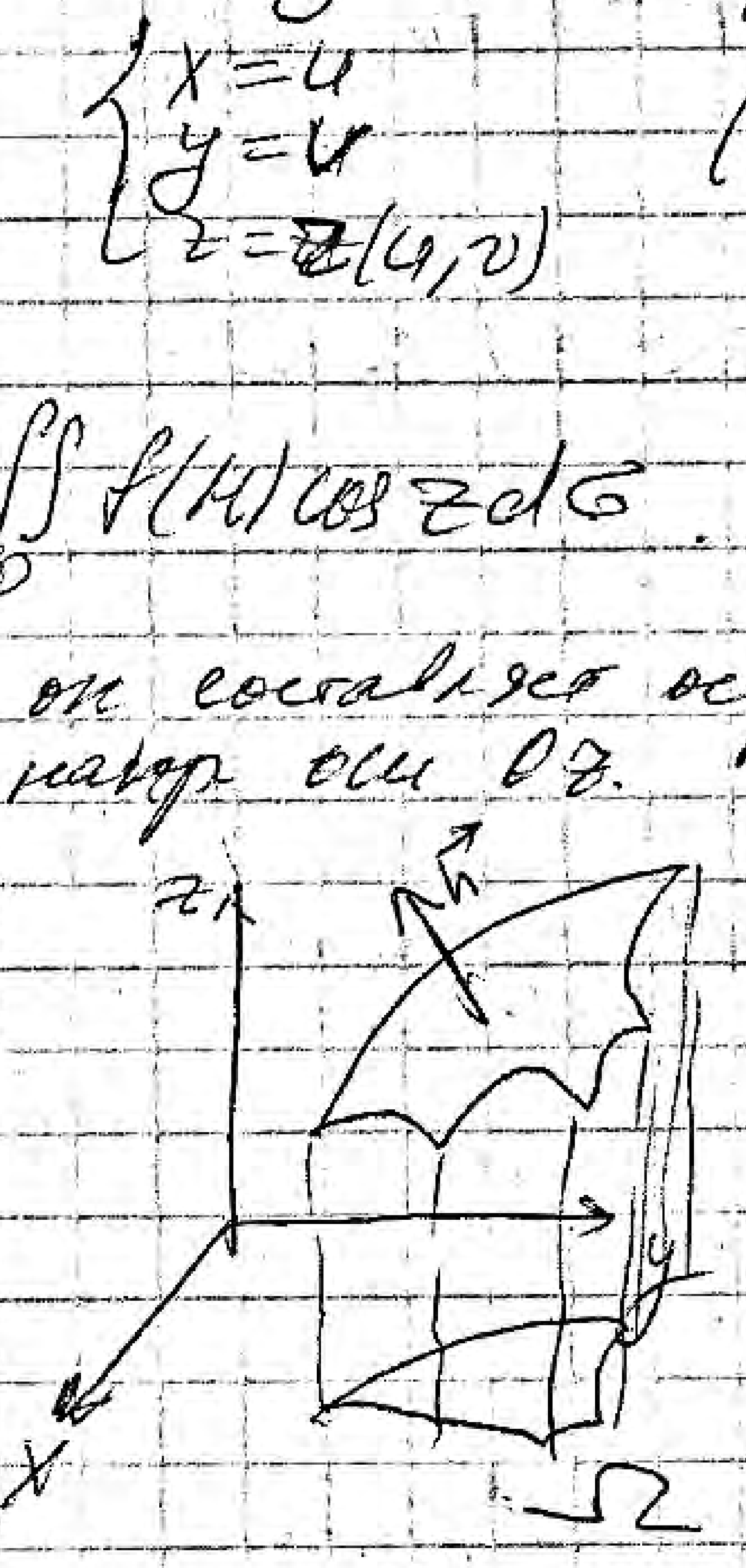
Таким образом

$$|\sigma_0(f)-I|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2C_0|G|}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{|f[u_i,v_i]|}_{\le C_0}\overset{S_{G_i}}{\sigma_i}<\varepsilon$$

Замечание. Пусть гладкая пов-ть Φ такова, что она взаимно однозначно проектируется на координатную пл-ть Oxy и, если сама, явл. "графиком" ф-ции $z=z(x,y)$, $(x,y)\in\Omega$ (иными словами, пов-ть Φ допускает параметризацию):

$$\begin{cases}x=u\\ y=v\\ z=z(u,v)\end{cases}\quad (u,v)\in\Omega$$

$\iint\limits_{\Phi} f(M)\cos z\,d\sigma$. Считаем, что вектор нормали к Φ выбран так, что он составляет острый угол с положит. напр. оси Oz.



$E=|\bar r_u|^2$ ← радиус-вект. проекц. в ...

$F=|\bar r_v|^2$

$G=(\bar r_u,\bar r_v)$

$\bar r=(u,v,z(u,v))$

$\bar r_u=(1,0,z_u)$; $\bar r_v=(0,1,z_v)$

$(\bar r_u,\bar r_v)=z_u z_v$

(88)

$\Rightarrow E=1+z_u^2$; $F=1+z_v^2$

$G=z_u z_v$

$$\Rightarrow\sqrt{EF-G^2}=\sqrt{1+z_v^2+z_u^2+z_u^2z_v^2-z_u^2z_v^2}=\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}$$

$\cos z$ = проекция коорд. единичного вект. нормали

$$\bar{n} = \frac{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{|[\bar{r}_u, \bar{r}_v]|}$$

$|[\bar{r}_u, \bar{r}_v]| = \sqrt{EF - G^2}$ (проверяем)

$$\cos z \, d S = \frac{\{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]\}_3}{\sqrt{EF - G^2}} \sqrt{EF - G^2} \, du dv = du dv$$

$$[\bar{r}_u, \bar{r}_v] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{vmatrix} = (-z_u, -z_v, 1)$$

$$\iint\limits_{\Phi} f(M) \cos z \, d\sigma = \iint\limits_{\Omega} f(u, v, z(u,v)) \, du dv$$

$$= \iint\limits_{\Omega} f(x, y, z(x,y)) \, dx dy$$

Для данного поверхностного интеграла II рода используется также обозначение:

$$\iint\limits_{\Phi} f(M) dx dy$$

Для общего поверхностного инт. II рода:

$$\iint\limits_{\Phi} (P \cos x + Q \cos y + R \cos z) \, d\sigma \overset{\text{обозначение}}{=}$$

$$= \iint\limits_{\Phi} P dy dz + Q dx dz + R dx dy$$

Глава V

Элементы теории поля

R^3: скалярные ф-ции $u = f(x, y, z)$
векторные ф-ции $\bar{u} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$

§1 Преобразование базисов и координат. Инварианты.

Расм. в R^3 со скал. произв.
произв. базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

Опр. Базис $\bar{e}^1 \bar{e}^2 \bar{e}^3$ назыв. взаимным (биортогональным) к $\bar{e}_1 \; \bar{e}_2 \; \bar{e}_3$, если

$(\bar{e}_i, \bar{e}^j) = \delta_i^j$ — символ Кронекера

Утв: $\forall$ базиса e $\exists!$ взаимный базис e^*

Зам: $\bar{e}^1 = \dfrac{[\bar{e}_2, \bar{e}_3]}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}$ $\quad \bar{e}^2 = \dfrac{[\bar{e}_1, \bar{e}_3]}{(e_1, e_2, e_3)}$,

$$\bar{e}^3 = \frac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)}$$

Расм. разложение $\forall \bar{x} \in R^3$ по базису $e(e^*)$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \bar{e}_i$$

$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{e}^j) = \sum x^i (\bar{e}_i, \bar{e}^j) = x^j$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \Leftrightarrow j = i; \; 0, j \neq i$

$\bar{x} = \sum_i x_i \bar{e}^i \qquad (\bar{x}, \bar{e}_j) = \sum_i x_i (\bar{e}^i, \bar{e}_j) = x_j$

Утв: $\bar{x} = \sum_i (\bar{x}, \bar{e}^i) \bar{e}_i$

$\bar{x} = \sum_i (\bar{x}, \bar{e}_i) \bar{e}^i$

Применим данное утв. к векторам взаимного (исх.) базиса

$\bar{e}^k = \sum_i (\bar{e}^k, \bar{e}^i) \bar{e}_i \; \forall k$ ← м. Грамма базиса $\bar{e}^*$

$\bar{e}_k = \sum_i (\bar{e}_k, \bar{e}_i) \bar{e}^i \; \forall k$ базиса $\bar{e}$

матрицы Грамма

$\Gamma(e^*) = \|(\bar{e}^k, \bar{e}^i)\|^3_{k,i=1}$

$\Gamma(e) = \|(\bar{e}_k, \bar{e}_i)\|^3_{k,i=1}$

$\Rightarrow \Gamma(e^*) = [\Gamma(e)]^{-1}$

Преобразование базисов

$R^3 \; \bar{e}_1 \; \bar{e}_2 \; \bar{e}_3 \rightsquigarrow$ новый базис $\bar{f}_1 \; \bar{f}_2 \; \bar{f}_3$

Матрица перехода от базиса $\{e\}$ к $\{f\}$

$\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} B$ ← выражаем в виде e

↑ матр. перехода

$\bar{f}_t = \sum_{s=1}^3 b_t^s \bar{e}_s \; \forall t = \overline{1,3}$

При таком преобразовании базиса автоматически преобразуется и взаимный базис e^*

Пусть $\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3$ — взаимные к $\bar{f}_1 \; \bar{f}_2 \; \bar{f}_3$. ($f^*$)

Запишем матрицу перехода от взаимного базиса e^* к f^*

$\{\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3\} = \{\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3\} C$

$\Leftrightarrow \bar{f}^t = \sum_{s=1}^3 c_s^t \bar{e}^s$

Утв $C = B^{-1}$

Д-во $(\bar{f}^t, \bar{f}_p) = \delta_p^t$ {0 или 1} $=$

$= \left(\sum_{s=1}^3 c_s^t \bar{e}^s, \sum_{q=1}^3 b_p^q \bar{e}_q\right) =$

$= \sum_{s,q=1}^3 c_s^t b_p^q (\bar{e}^s, \bar{e}_q) =$ ($s = q$)

$\sum_{s=1}^3 c_s^t b_p^s$

$\Rightarrow \sum_{s=1}^3 c_s^t b_p^s = \delta_p^t \Rightarrow CB = I$, ч.т.д.

Пусть $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \bar{e}_i = \sum_{j=1}^{3} y^j \bar{f}_j =$

$$= \sum_{j=1}^{3} y^j \left(\sum_{s=1}^{3} b_j^s \bar{e}_s\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} y^i b_i^s \bar{e}_s \Rightarrow$$

$$\sum_s x^s \bar{e}_s = \sum_s \left(\sum_i y^i b_i^s\right) \bar{e}_s$$

$$\Rightarrow x^s = \sum_{i=1}^{3} y^i b_i^s$$

Справедлива след. ф-ла преобр. коорд.

$$x^s = \sum_i b_i^s y^i \quad \forall s$$

Аналогично для координат вектора $\bar{x}$ отн. взаимных базисов:

$$\bar{x} = \sum_i x_i \bar{e}^i = \sum_i y_i \bar{f}^i$$

$\Rightarrow \boxed{x_i = \sum_j c_i^j y_j}$, где $C = (c_i^j)$ - матр. перехода

$B = C^{-1} \Rightarrow \boxed{y_j = \sum_s b_j^s x_s}$

Инварианты лин. оп. в $\mathbb{R}^3$ — не зависит от выбора базиса

Рассм. $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ - лин. оп.

Ут 1 Величина $\sum_i (\mathcal{A}\bar{e}_i, \bar{e}^i)$ не зависит от выбора e в $\mathbb{R}^3$

Д-во Рассм. любой базис f в $\mathbb{R}^3$ и его взаимный f^*

$$\sum_i (\mathcal{A}\bar{f}_i, \bar{f}^i) = \sum_i \left(\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{3} b_i^j \bar{e}_j\right), \sum_{s=1}^{3} c_s^i \bar{e}^s\right)$$

{матр. перехода B и C}

$$= \sum_{i,j,s} (b_i^j \mathcal{A}\bar{e}_j, c_s^i \bar{e}^s) = \sum_{i,j,s} b_i^j c_s^i (\mathcal{A}\bar{e}_j, \bar{e}^s)$$

$$= \sum_{j,s} (\mathcal{A}\bar{e}_j, \bar{e}^s) \cdot \sum_i b_i^j c_s^i =$$

$$= \sum_j (\mathcal{A}\bar{e}_j, \bar{e}^j)$$

Замечание 1. Т.к. исходный базис явл. взаимным к $\bar{e}^1\ \bar{e}^2\ \bar{e}^3$, то $\sum_{i=1}^{3} (\mathcal{A}\bar{e}_i, \bar{e}^i)$ удовл. утв 1.

Зам 2 Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - ортонорм. базис в $\mathbb{R}^3$. Он сам себе взаимен (из опр. ортонорм. б.)

$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Тогда

$$\mathcal{A}\bar{e}_1 = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3 \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = (\mathcal{A}\bar{e}_1, \bar{e}_1)$ ← как новый б., но тот же

$\Rightarrow (\mathcal{A}\bar{e}_1, \bar{e}_1) = \alpha_1$

$(\mathcal{A}\bar{e}_2, \bar{e}_2) = \beta_2$ } Аналогично

$(\mathcal{A}\bar{e}_3, \bar{e}_3) = \gamma_3$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} (\mathcal{A}\bar{e}_i, \bar{e}_i) = \underset{\text{инвариантна (зависит от базиса)}}{tr A_e} = \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$

$= \sum$ собств.зн. $\mathcal{A}$ с учетом алг. кр.

Утв 2 $\sum_{i=1}^{3} [e_i, \mathcal{A}\bar{e}^i]$ не зависит от пары взаимных базисов

Д-во

$\sum_i [\bar{f}_i, \mathcal{A}\bar{f}^i] =$ | $\bar{f}_i = \sum_k b_i^k e_k$, $\bar{f}^i = \sum_s c_s^i \bar{e}^s$, $BC = I$

$= \sum_{i,k,s} b_i^k c_s^i [\bar{e}_k, \mathcal{A}\bar{e}^s] =$

$\sum_{k,s} [\bar{e}_k, \mathcal{A}\bar{e}^s] \cdot \underbrace{\sum_i b_i^k c_s^i}_{\delta_s^k} =$

$= \sum_k [\bar{e}_k, \mathcal{A}\bar{e}^k]$, чтд

Зам Пусть базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – О.Н.Б. и правый

$\sum_k [\bar{e}_k, \mathcal{A}\bar{e}_k] = (*)$

$\mathcal{A}\bar{e}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + a_{31}\bar{e}_3$ от компланарност

$\Rightarrow [\bar{e}_1, \mathcal{A}\bar{e}_1] = a_{21}\underbrace{[\bar{e}_1, \bar{e}_2]}_{e_3} + a_{31}\underbrace{[\bar{e}_1, \bar{e}_3]}_{-\bar{e}_2}$

т.к. ортонорм, правый

$\mathcal{A}\bar{e}_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{32}\bar{e}_3$

$[\bar{e}_2, \mathcal{A}\bar{e}_2] = a_{12}\underbrace{[\bar{e}_2, \bar{e}_1]}_{-\bar{e}_3} + a_{32}\underbrace{[\bar{e}_2, \bar{e}_3]}_{\bar{e}_1}$

$\mathcal{A}\bar{e}_3 = a_{13}\bar{e}_1 + a_{23}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3$

$[\bar{e}_3, \mathcal{A}\bar{e}_3] = a_{13}\underbrace{[\bar{e}_3, \bar{e}_1]}_{+\bar{e}_2} + a_{23}\underbrace{[\bar{e}_3, \bar{e}_2]}_{-\bar{e}_1}$

$\Rightarrow \sum_k [\bar{e}_k, \mathcal{A}\bar{e}_k] = (a_{21}\bar{e}_3 - a_{31}\bar{e}_2) +$

$+ (-a_{12}\bar{e}_3 + a_{32}\bar{e}_1) + (a_{13}\bar{e}_2 - a_{23}\bar{e}_1) =$

$= (a_{32} - a_{23})\bar{e}_1 + (a_{13} - a_{31})\bar{e}_2 + (a_{21} - a_{12})\bar{e}_3$

Если оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен (⇒ симметрическая матр.)

$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

$\Rightarrow \sum_k [\bar{e}_k, \mathcal{A}\bar{e}_k] = 0$

Опр 1 $\sum_i (\bar{e}_i, \mathcal{A}\bar{e}^i)$ – дивергенция оператора $\mathcal{A}$ ($\operatorname{div} \mathcal{A}$)

Опр 2 Вектор $\sum_i [\bar{e}_i, \mathcal{A}\bar{e}^i]$ – ротор $\mathcal{A}$ ($\operatorname{rot} \mathcal{A}$)

§2 Основные операции и понятия теории поля

фия $u = u(x,y,z) \equiv u(M) \in \mathbb{R}^3$ – скалярное поле в $\mathbb{R}^3$, в каждой точке $\mathbb{R}^3$

$\bar{P} = \bar{P}(x,y,z) \equiv \bar{P}(M) = \{P, Q, R\}$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$

вект. ф-ция

1° Дифференцируемое скалярное поле

$M_0 \in \mathbb{R}^3$, её радиус-вектор $\bar{r}_0$ (у нек фикс $\tau \in \mathbb{R}^3$)

$M \in \mathbb{R}^3$, её рад-вект $\bar{r}$

Приращение скал поля $u(M)$ в т. M_0:

$\Delta u(M_0) = u(M) - u(M_0)$

вект приращение „аргумента"

$\Delta\bar{r} = \bar{r} - \bar{r}_0$

Опр. ск. поле $u(M)$ наз. дифференцируемым в т. M_0, если справедливо представление:

(1) $\Delta u(M_0) = (\bar{g}, \Delta\bar{r}) + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|)$, $|\Delta\bar{r}| \to 0$,

в кот. $\bar{g}$ – не зависит от т. M

Зам 1 Вектор $\bar{g}$ (1) определяется однозначно

Д-во: Пусть $\exists\, \bar{h}$: $\Delta u(M_0) = (\bar{h}, \Delta\bar{r}) + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|)$

$\Rightarrow (\bar{g}, \Delta\bar{r}) + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|) = (\bar{h}, \Delta\bar{r}) + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|)$

$\Rightarrow (\bar{g} - \bar{h}, \Delta\bar{r}) = \bar{o}(|\Delta\bar{r}|) \quad | \div |\Delta\bar{r}|$

$\Rightarrow \left(\bar{g} - \bar{h}, \underbrace{\frac{\Delta\bar{r}}{|\Delta\bar{r}|}}_{\text{единичного длины, нет предела}}\right) = \bar{o}(1)$ зависит от $\bar{\tau}$ (зависит от $\bar{\tau}$)

$\Delta|\Delta\bar{r}| \to 0$

Будем считать, что переход к пределу $|\Delta\bar{r}| \to 0$ происходит так, что $\Delta\bar{r} \uparrow\uparrow \bar{e}$, где $\bar{e}$ – фикс. вект.

Тогда в последнем равенстве:

$(\bar{g}, \bar{e}) + \bar{o}(1) = (\bar{h}, \bar{e})$

$\Leftrightarrow (\bar{g} - \bar{h}, \bar{e}) = \bar{o}(1) \quad | \; |\Delta\vec{r}| \to 0$

(зависит от M)

$(\bar{g} - \bar{h}, \bar{e}) = 0 \quad \forall\, \bar{e}$ – единичного вектора

$\Rightarrow (\bar{g} - \bar{h}) = 0 \Rightarrow \bar{g} = \bar{h}$ ($\Rightarrow$ и для любого вект. в воздухе)

($\Rightarrow ((\bar{g} - \bar{h}, \bar{g} - \bar{h}) = 0 \Leftrightarrow \bar{g} - \bar{h} = 0$)

Опр Вектор $\vec{g}$ наз градиентом скал. поля $u(M)$

$$\vec{g} = \operatorname{grad} u$$

Если ск. поле $u(M)$ диф-ем в $\forall$ т. $M_0 \in \Omega \subset R^3 \Rightarrow$

$\forall M_0 \in \Omega$ определён вектор градиента $\operatorname{grad}(u(M_0))$, иными словами,

$\operatorname{grad} u$ – некоторое векторное поле в Ω

Представление (1) можно переписать:

$$\Delta u(M_0) = (\operatorname{grad}[u(M_0)], \Delta\vec{r}) + \bar{o}(|\Delta\vec{r}|), \ |\Delta\vec{r}| \to 0$$

дифференциал u в т. M_0

Утв 2 Пусть $u(M)$, $v(M)$ – дифф. ск. поля в Ω, тогда:

$\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$ (линейность)

(2) $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$ (u, v – скаляры!)

$$\operatorname{grad}(u/v) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2} \quad (v(M_0) \neq 0)$$

$\operatorname{grad}[F(u)] = F'(u) \operatorname{grad} u$ $\quad F(t)$ – диф-мая ф-ция

ф-ция одной переменной, взят в т. u

Д-во (нигде координаты не участвуют)

(2) $\underbrace{u(M)v(M) - u(M_0)v(M_0)}_{\Delta uv(M_0)} =$

$= (u(M) - u(M_0))v(M) + u(M_0)(v(M) - v(M_0)) =$

$= \Delta u(M_0) v(M) + \Delta v(M_0) u(M_0) =$

$= (\operatorname{grad}[u(M_0)], \Delta\vec{r}) v(M) +$

$+ \bar{o}(|\Delta\vec{r}|) v(M) + u(M_0)(\operatorname{grad}[v(M_0)], \Delta\vec{r}) +$

$+ u(M_0) \bar{o}(|\Delta\vec{r}|)$ (*) $\quad v(M) = (v(M_0) + (\operatorname{grad} v(M_0), \Delta\vec{r}) + \bar{o}(|\Delta\vec{r}|))$ ← ограничена, если $|\Delta\vec{r}| \leq 1$

фикс.

$\Rightarrow \bar{o}(|\Delta\vec{r}|)$

$\Rightarrow$ (*) $= (\operatorname{grad} u(M_0), \Delta\vec{r})(v(M_0) + (\operatorname{grad} v(M_0), \Delta\vec{r}) +$ огр.

$+ \bar{o}(|\Delta\vec{r}|)) + u(M_0)(\operatorname{grad} v(M_0), \Delta\vec{r}) +$

$+ \bar{o}(|\Delta\vec{r}|) =$

$= (\operatorname{grad} u(M_0), \Delta\vec{r}) v(M_0) + \underline{(\operatorname{grad} u(M_0), \Delta\vec{r})} \cdot$

$\cdot \underline{(\operatorname{grad} v(M_0), \Delta\vec{r})} + u(M_0)(\operatorname{grad} v(M_0), \Delta\vec{r})$

$+ \bar{o}(|\Delta\vec{r}|) \stackrel{\text{по Коши-Буняковскому ??}}{=}$

$= (v(M_0)\operatorname{grad} u(M_0) + u(M_0)\operatorname{grad} v(M_0), \Delta\vec{r}) + \bar{\bar{o}}(|\Delta\vec{r}|) =$

$= \operatorname{grad} uv(M_0), \Delta\vec{r})$.

Пусть $u(M)$ – скал. поле, $M_0 \in \mathbb{R}^3$, $\bar{e}$ – ед. вектор

$u(M) - u(M_0)$ — как, куда

$\Delta\bar{r} = \bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{e}$, $t > 0$

Опр Если $\exists \lim\limits_{t \to 0+0} \frac{u(M)-u(M_0)}{t}$, то он называется производной $u(M)$ в т. M_0 по направлению $\bar{e}$

Обозначение: $\frac{\partial u}{\partial \bar{e}}(M_0)$

Утв 3 Если $u(M)$ дифференцируемо в т. M_0, то $u(M)$ имеет в т. M_0 производную по любому направлению, причём

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{e}}(M_0) = (\operatorname{grad} u(M_0), \bar{e})$$

Д-во: $u(M) - u(M_0) = (\operatorname{grad} u(M_0), \Delta\bar{r}) + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|)$

Для производной по ~~произвольному~~ вектору $\bar{e}$: (единичному)

$\Delta\bar{r} = t\bar{e}$, $t > 0$

$\Rightarrow u(M) - u(M_0) = (\operatorname{grad} u(M_0), t\bar{e}) + \bar{o}(t)$

$\Rightarrow \frac{u(M)-u(M_0)}{t} = (\operatorname{grad} u(M_0), \bar{e}) + \bar{o}(1)$, $t \to 0+0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \bar{e}}(M_0) = \lim\limits_{t \to 0+0} \frac{u(M)-u(M_0)}{t} = (\operatorname{grad} u(M_0), \bar{e})$, что и требовалось.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задан о.н.б. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

$\operatorname{grad} u(M_0) = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3 =$

$= (\operatorname{grad} u(M_0), \bar{e}_1)\bar{e}_1 + (\operatorname{grad} u(M_0), \bar{e}_2)\bar{e}_2 +$

$+ (\operatorname{grad} u(M_0), \bar{e}_3)\bar{e}_3 =$

$\overset{\text{утв 2}}{=} \frac{\partial u}{\partial e_1}\bar{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial e_2}\bar{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial e_3}\bar{e}_3 = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{e}_3$

Утв 4 В о.н.б. $\mathbb{R}^3$:

$\operatorname{grad} u(M_0) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \right\}$

(2°) Дифференцируемое векторное поле

Пусть $\bar{p}(M) \overset{\text{вект}}{=}$, $M_0 \in \mathbb{R}^3$, $\Delta\bar{r} = \bar{r} - \bar{r}_0$

Опр Вект. поле $\bar{p}(M)$ наз. дифф. в т. M_0, если

$\Delta\bar{p}(M_0) \equiv \bar{p}(M) - \bar{p}(M_0) = \underset{\text{вектор}}{A\Delta\bar{r}} + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|)$, $|\Delta\bar{r}| \to 0$

где A – лин. оп. в $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ и не зависящий от т. M ($и$ M_0)

вектор $\bar{R}(\Delta\bar{r}) = \bar{o}(|\Delta\bar{r}|)$, $|\Delta\bar{r}| \to 0$, если $\lim\limits_{|\Delta\bar{r}| \to 0} \frac{|\bar{R}(\Delta\bar{r})|}{|\Delta\bar{r}|} = 0$

Утв 5 Оператор A в этом представлении определяется однозначно

Д-во: От противного. Для $\bar{p}(M) - \bar{p}(M_0)$:

$A\Delta\bar{r} + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|) = B\Delta\bar{r} + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|)$, пусть $\Delta\bar{r} = \bar{e}t$

тогда $t\mathcal{A}\bar{e} + t\bar{o}(1) = t\mathcal{B}\bar{e} + t\bar{o}(1) \mid \div t \ (t>0)$

$t\to 0$

$\mathcal{A}\bar{e} + \bar{o}(1) = \mathcal{B}\bar{e} \Rightarrow \mathcal{A}\bar{e} = \mathcal{B}\bar{e} \Leftrightarrow$

участвует здесь

$\Leftrightarrow (\mathcal{A}-\mathcal{B})\bar{e} = \vec{0} \quad \forall$ ед. $\bar{e} \Rightarrow$

и на любой вектор (в силу линейности)

$\Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$

Опр Производная $\bar{p}(M)$ в т. M_0 по напр. един. вект. $\bar{e}$ наз.

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{\bar{p}(M)-\bar{p}(M_0)}{t} \quad \left(\equiv \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}}\right), \text{ где } \bar{r}_M - \bar{r}_{M_0} = t\bar{e}$$

Утв 6 Если $\bar{p}(M)$ диф-ма в т. M_0 то $\exists \ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}}$ $(\forall \bar{e})$ и $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}} = \mathcal{A}\bar{e}$

Д-во $\Delta\bar{r} = t\bar{e}, t>0$; $|\Delta \bar{r}| \to 0 \Leftrightarrow t \to 0+0$

$\Rightarrow \bar{p}(M) - \bar{p}(M_0) = \mathcal{A}(t\bar{e}) + \bar{o}(t) \quad (|\bar{e}| = 1)$

$$\Rightarrow \frac{\bar{p}(M)-\bar{p}(M_0)}{t} = \mathcal{A}\bar{e} + \underbrace{\frac{\bar{o}(t)}{t}}_{t\to 0} \to \theta \Rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}} = \mathcal{A}\bar{e}$$

Пусть в $\mathbb{R}^3$ орт/норм базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и коорд. вект. поле $\bar{p}(M)$ в этом базисе

$$\bar{p}(M) = \{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$$

Оператор $\mathcal{A}$ характеризуется своей матрицей A_e

т.к. базис ортонорм $\Rightarrow$ в столбцах:

$$A_e = \Big(\ (\ )\ (\ )\ (\ )\ \Big)$$

$\mathcal{A}\bar{e}_1 \ \mathcal{A}\bar{e}_2 \ \mathcal{A}\bar{e}_3$

координаты

$$\mathcal{A}\bar{e}_1 \underset{(\text{у-в } 6)}{=} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}_1} = \left\{\frac{\partial P}{\partial \bar{e}_1}, \frac{\partial Q}{\partial \bar{e}_1}, \frac{\partial R}{\partial \bar{e}_1}\right\} = \left\{\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x}\right\}$$

$\mathcal{A}\bar{e}_2 = \dots \quad \mathcal{A}\bar{e}_3 = \dots$

$$A_e = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \\ (\mathcal{A}\bar{e}_1) & (\mathcal{A}\bar{e}_2) & (\mathcal{A}\bar{e}_3) \end{pmatrix}$$

Опр Дивергенцией вект. поля $\bar{p}$ назыв. дивергенция $\mathcal{A}$.

Ротором $\bar{p}$ — ротор $\mathcal{A}$

$\operatorname{div}\bar{p}$ (скаляр) $\operatorname{rot}\bar{p}$ (вектор)

Выражения для $\operatorname{div}\bar{p}$, $\operatorname{rot}\bar{p}$ в ОНБ $\mathbb{R}^3$

$\vee$ $\operatorname{div}\bar{p} = \operatorname{div}\mathcal{A} = (\bar{e}_1, \mathcal{A}\bar{e}_1) + (\bar{e}_2, \mathcal{A}\bar{e}_2) + (\bar{e}_3, \mathcal{A}\bar{e}_3)$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$\vee$ $\operatorname{rot}\bar{p} = \operatorname{rot}\mathcal{A} = [\bar{e}_1, \mathcal{A}\bar{e}_1] + [\bar{e}_2, \mathcal{A}\bar{e}_2] + [\bar{e}_3, \mathcal{A}\bar{e}_3] =$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{e}_1 + \left(-\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{e}_3$$

(предыдущая компонента с "–"

x, y, z)

$$[\bar e_1, A\bar e_1] = \begin{Vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial x} \end{Vmatrix} = -\left(\frac{\partial R}{\partial x}\bar e_2 - \frac{\partial Q}{\partial x}\bar e_3\right)$$

$$[\bar e_2, A\bar e_2] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial R}{\partial y}\bar e_1 - \frac{\partial P}{\partial y}\bar e_3$$

$$[\bar e_3, A\bar e_3] = -\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\bar e_1 - \frac{\partial P}{\partial z}\bar e_2\right)$$

Гамильтон: набла $\nabla F = \bar e_1\frac{\partial F}{\partial x} + \bar e_2\frac{\partial F}{\partial y} + \bar e_3\frac{\partial F}{\partial z}$

оператор — вектор

$$(\nabla, \bar p) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$\bar p = (\bar e_1 P + \bar e_2 Q + \bar e_3 R)$

$$[\nabla, \bar p] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial z}R \equiv \frac{\partial R}{\partial z} \text{ (подразумеваем)}$$

$$= \bar e_1\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \bar e_2\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \bar e_3\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

3° Повторные операции теории поля

$u = u(M)$ — скал. поле $\Rightarrow$ grad u — вект. поле $\Rightarrow$ div(grad u), rot(grad u)

$\bar p = \bar p(M)$ — вект. поле $\Rightarrow$ div $\bar p$ — скал. п. $\rightarrow$ grad(div $\bar p$)

rot $\bar p$ — вект. п. $\rightarrow$ rot(rot $\bar p$), $\rightarrow$ div(rot $\bar p$)

Диф-мы в т. обл. $\Omega \in R^3$

Утв 7 $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) \equiv \bar 0$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\bar p) \equiv 0$

Д-во: В ОНБ $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\} (= \nabla u)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar e_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right) + \theta = 0$$

2-жды дифф-ма $\Rightarrow 0$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\bar p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

Утв 8: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \overset{def}{=} \Delta u$ — оператор Лапласа.

Д-во $\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \ldots = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots$$

Утв 9 $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar p) =$

Д-во
$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar p) = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_y - Q_z & -R_x + P_z & Q_x - P_y \end{vmatrix} =$$

$\frac{\partial R}{\partial y}$

$= \bar e_1(Q_{xy} - P_{yy} - (-R_{xz} + P_{zz})) - \bar e_2(Q_{xx} - P_{xy} - (R_{yz} - Q_{zz})) + \bar e_3(-R_{xx} + P_{xz} - (R_{yy} - Q_{yz})) =$

$= \bar e_1(-P_{yy} - P_{zz}) + \bar e_2(-Q_{xx} - Q_{zz}) + \bar e_3(-R_{xx} - R_{yy}) + \bar e_1(Q_{xy} + R_{xz}) + \bar e_2(P_{xy} + R_{yz}) + \bar e_3(P_{xz} + Q_{yz}) =$

$= -\bar e_1(\Delta P) - \bar e_2 \Delta Q - \bar e_3 \Delta R + \bar e_1(Q_{xy} + R_{xz} + P_{xx}) + \bar e_2(P_{xy} + R_{yz} + Q_{yy}) + \bar e_3(P_{xz} + Q_{yz} + R_{zz}) =$

$= -(\bar e_1 \Delta P + \bar e_2 \Delta P + \bar e_3 \Delta P) + \bar e_1 \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(P_x + Q_y + R_z)}_{\operatorname{div}\bar p} + \bar e_2 \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(P_x + Q_y + R_z)}_{\operatorname{div}\bar p} + \bar e_3 \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{(P_x + Q_y + R_z)}_{\operatorname{div} p} =$

$= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar p) - \Delta_{\bar p}$, ч.т.д.

Глава 6

Ф-лы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса

Пусть π - плоскость в R^3, $\bar k$ - вектор нормали к π ($|\bar k| = 1$)

D - односвязная обл на π

(D односвязна, если $\forall$ контура $C \subset D$ обл. D_0 с границей $\partial D_0 = C$: $D_0 \subset D$) (Нет дыр)

Доп. усл. на D:

1) $\partial D \equiv C$ - кус-гладкая кривая без особых точек.

2) $\exists$ прям. дек СК на π: любая прямая, $\parallel$-ная каждой из осей координат, пересекала C не более, чем в 2х точках.

Теор 1. Пусть выполнены все условия на D и пусть $\bar a$ - векторное поле, заданное на π, дифференцируемо в D, и такое, что $\bar a$ компланарно π и производная $\frac{\partial \bar a}{\partial \bar e}$ непр. в $\bar D$ $\forall$ направления $\bar e$ (с замыканием границей)

Справедлива ф-ла (Грина)

$$\iint_D \underbrace{(\operatorname{rot}\bar a, \bar k)\,d\sigma}_{\text{(лев. часть)}} = \oint_C \underbrace{(\bar a, \bar t)\,dl}_{\text{(пр. ч)}}$$

, где $\bar t$ - вект. касат. к C в пл-ти π и согласован с вект. $\bar k$ (смотреть сверху, обход контура - слева)

(л.ч) - поток ротора $\bar a$ через D

(п.ч) - циркуляция $\bar a$ вдоль C

Д-во: В $\mathbb{R}^3$ введём правую прям. дек. СК (ПДСК) так, чтобы $\bar{e}_3 = \bar{k}$ (на рис)

в силу того, что век. поле $\bar{a}$ "плоское" (компланарно π)

$$\bar{a} = \{P, Q, 0\} = P\bar{e}_1 + Q\bar{e}_2$$

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \bar{e}_1\left(-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \bar{e}_2\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \bar{e}_3\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$(\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{e}_3) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$t = \{\cos\alpha, \sin\alpha, 0\}$$

$$(\bar{a}, \bar{t}) = P\cos\alpha + Q\sin\alpha$$

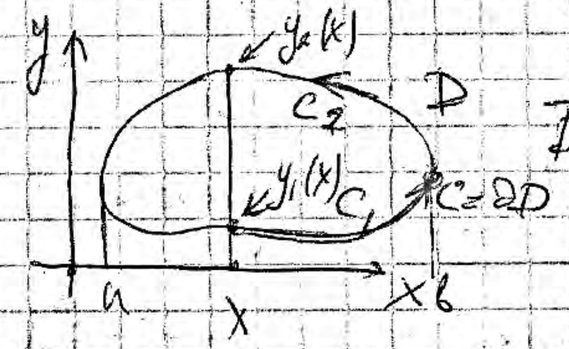
$$\Rightarrow \oint_C (\bar{a}, \bar{t})\,dl = \oint_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl \overset{\text{откуда? по опр!}}{=} \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_C P\,dx + Q\,dy \quad (*) \leftarrow \text{надо д-ть}$$

Докажем по отдельности 2 формулы:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_C \cancel{P\,dx}\; Q\,dy$$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_C P\,dx$$



$\bar{D}$: $a \le x \le b$

$y_1(x) \le y \le y_2(x)$

$\iint_{\bar{D}} f\,d\sigma$ – ограничена, включая границу, он собственный

$\iint_D f\,d\sigma$ – возможно, есть особые т.

$$\text{Л.ч} = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= -\int_a^b dx\,(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) =$$

$$= \underbrace{\int_a^b P(x, y(x))\,dx}_{\text{по } C_1} - \underbrace{\int_a^b P(x, y_2(x))\,dx}_{\text{по } C_2 \text{ в } \curvearrowright} =$$

{меняем направление}

$$= \oint_C P(x, y)\,dx$$. Аналогично 2-ой интеграл

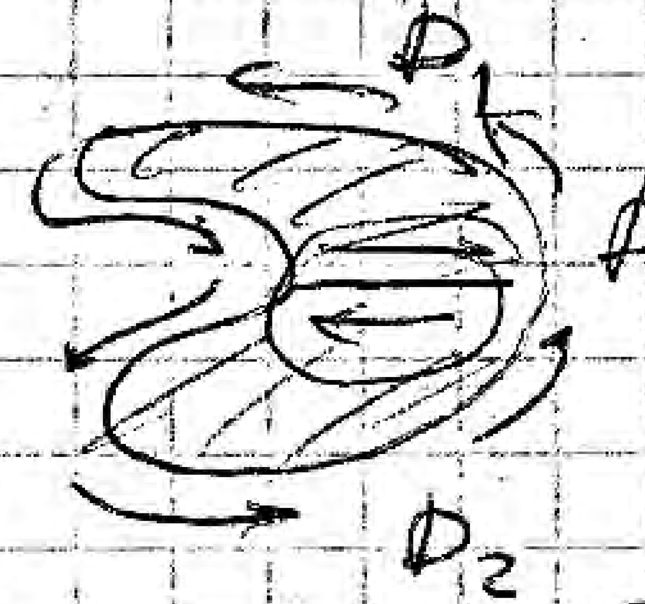
Зам 1 Утв т. 1 справедливо и в случае, когда обл. D можно разбить кус.-гладкими кривыми на конечное число частей:

$D = \bigcup_{i=1}^{N} D_i$, каждая из кот. удовл. усл. т. 1

Д.-г. ф-лы Грина

$$\iint\limits_{D} \ldots = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} \text{ в силу аддит. } \iint$$

Пр.-г. ф-лы Грина



$$\oint\limits_{\partial D_1} + \oint\limits_{\partial D_2}$$

Зам 2 В усл т.1 можно отказаться от требования 2 на ∂D и оставить лишь ∂D — кус-гл. кривая без особых т. и (Ильин–Позняк – т.2)

Зам 3 Ф-ла Грина справедлива в обл D со спрямляемой границей ∂D (1980)

Зам 4 В требованиях на гладкость вект. поля $\bar{a}$ можно оставить: $\bar{a}$ непр. в $D \cup \partial D$, $\bar{a}$ непр. дифф в D ($\forall$ произв. по напр $\frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{e}}$ непр в D) — дв. инт. в ф-ле Грина понимается в несобств. смысле (он $\exists$, выч. =)

§2 Ф-ла Остроградского–Гаусса

В R^3 — односвязная обл. D, $S = \partial D$ — поверхность, кот.

1) S — двусторонняя, огр., кусочно-гл., полная замкн., без особых точек

2) $\exists$ ПДСК в R^3: $\forall$ прям. $\parallel$ $\forall$ оси коорд. пересекает S не более, чем в 2 т.

Пусть $\bar{n} = \bar{n}(M)$ — вект. ед. внешн. нормали к S'

Пусть $\bar{a}$ — вект. поле, опр. в непр. и дифф. в $D \cup S$, $\forall \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{e}}$ непр в $D \cup S$.

Теор. 2 При вып. этих усл.:

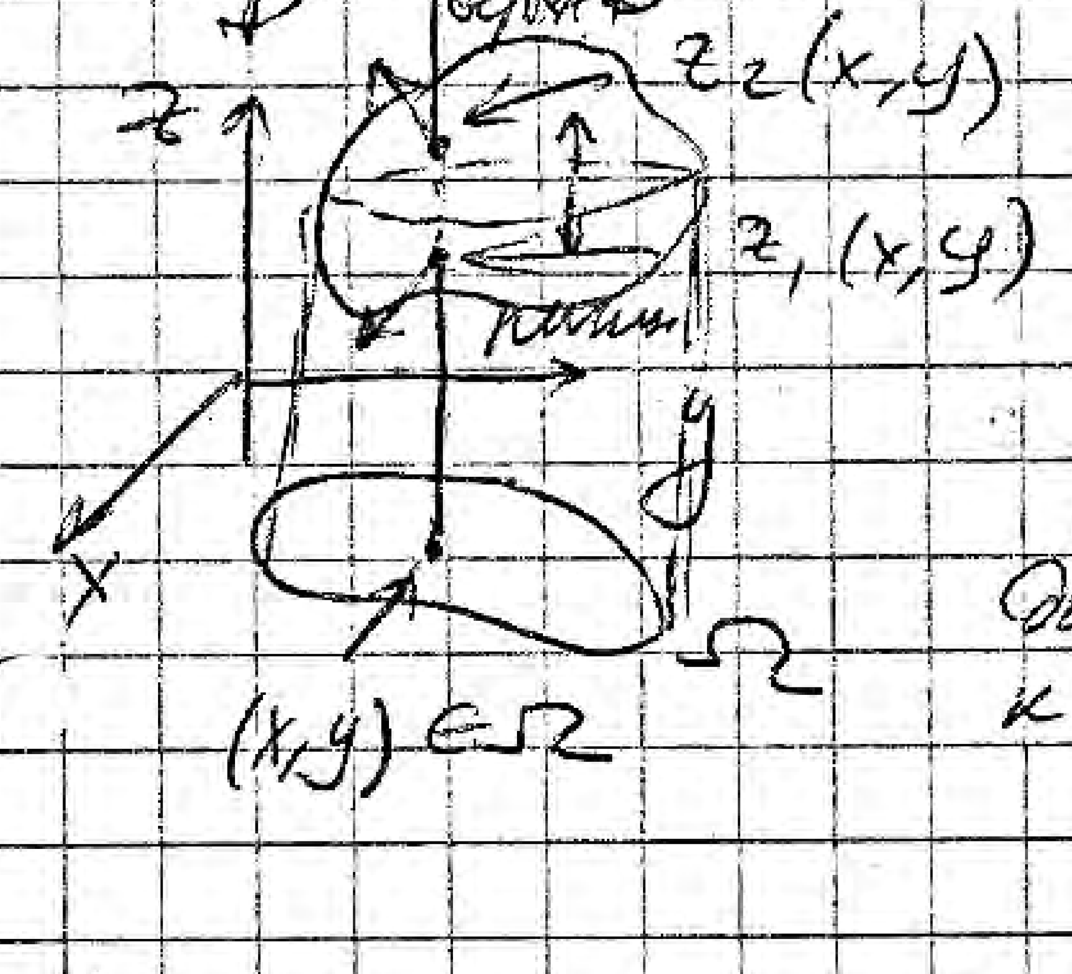
$$\iiint\limits_{D} \operatorname{div} \bar{a}\, dV = \underbrace{\iint\limits_{S} (\bar{a}, \bar{n})\, d\sigma}_{\text{поток } \bar{a} \text{ через } S'}$$

Д-во: рассм. $Oxyz$, удовл. 2), тогда $\bar{a} = \{P, Q, R\}$, $\bar{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$$\iiint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma = \iint\limits_{S} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$$

Д-ем, например:

$$\iiint\limits_{D} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S} R\,dx\,dy$$



D: $(x,y) \in \Omega$

$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$

Перейдём в л. части доказываемого соотн. к повт. интегралу

$$\iiint_{\bar D} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_{\Omega} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$$

$$= \iint_{\Omega} dxdy \big(R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) \big) =$$

$$= \iint_{\Omega} R(x,y,z_2(x,y))\, dxdy - \iint_{\Omega} R(x,y,z_1(x,y))\, dxdy$$

$$= \iint_{S_B} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{S_H} R\cos\gamma\, d\sigma$$ пр. г.

Зам 1 Ф-ла О-Г верна и в обл. D, кот. конечным числом поверхностей можно разб. на обл.

$D = \bigcup_{i=1}^{N} D_i$, где D_i удовл. усл. т-г

$$\iiint_{\bar D} \ldots = \iiint_{\bar D_B} \ldots + \iiint_{\bar D_H}$$ нормали противоположны

Зам 2 От требований 2 на ∂D можно отказаться

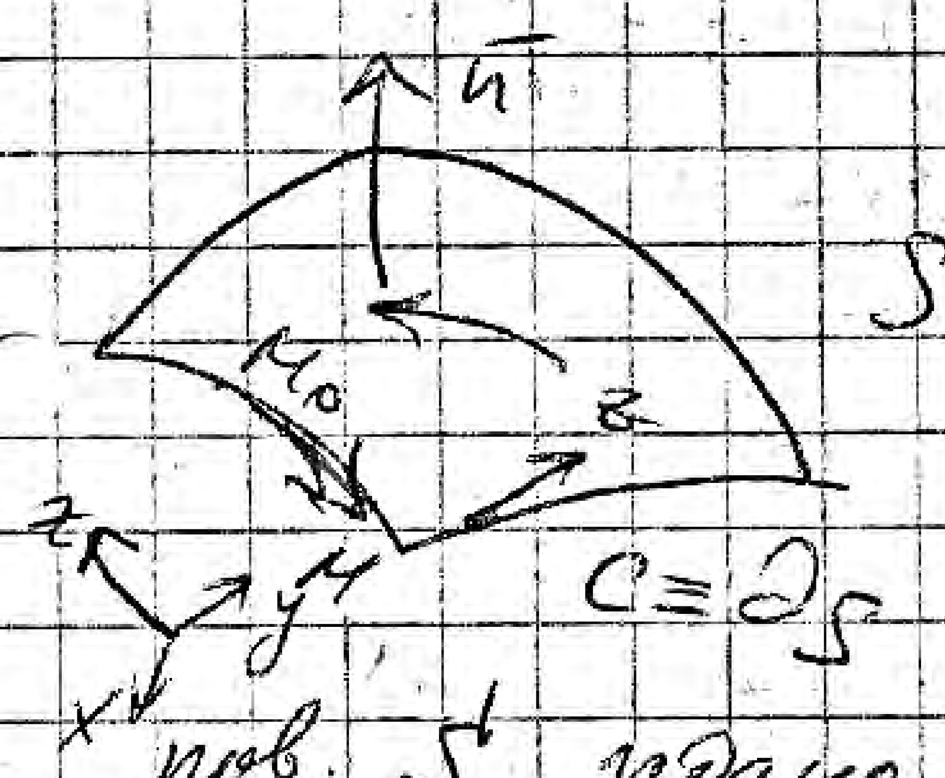
Зам 3 Можно ослабить усл. на вект. поле $\bar a$, заменив непр-ть $\frac{\partial \bar a}{\partial e}$ в D на непр. $\frac{\partial \bar a}{\partial \bar e}$ в D (инт. в несобств. смысле)

§3 Ф-ла Стокса

Пусть S — двустор. полная, огр., кус-гл. пов. в R^3 без особых т.

$C = \partial S$ — кус-гл. контур в R^3,

$\bar n = \bar n(M)$ — ед. вектор норм. к S



$\bar t = \bar t(M)$ согласован $C - \bar n$

$\bar t$ — вект. касат. к C

Пусть в нек. окр. пов. S задано вект. поле $\bar a$

Потребуем дополнительно: $\exists$ ПДСК в R^3: пов-ть S однозначно проектируется на $\forall$ коорд. пл-ть

Теор 3 Если $\bar a$ — непр. дифф. в окр. S,

$$\iint_S (\text{rot}\,\bar a, \bar n)\, d\sigma = \oint_C (\bar a, \bar t)\, dl$$

(Ф-ла Стокса)

Д-во Рассм. ПДСК $Oxyz$ удовл. усл. перед т. 3 $\bar a = \{P, Q, R\}$,

$\bar n = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$, $\bar t = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\bar a = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \{R_y - Q_z, -P_x + P_z, Q_x - P_y\}$$

Ф-ла Стокса

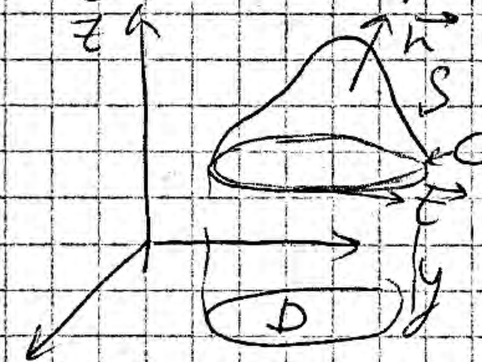
$$\iint\limits_S (R_y - Q_z)\cos\alpha + (-R_x + P_z)\cos\gamma + (Q_x - P_y)\cos\beta)\,d\sigma =$$

$$= \oint (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \oint P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$\iint\limits_S (P_z\cos\gamma - P_y\cos\beta)\,d\sigma = \oint P\,dx$$

Угол между $\vec{n}$ и Oz - острый

Пусть D - проекция на Oxy, $l = \partial D$



Зададим S как график ф-ции $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$

$$\vec{n} = \frac{[\vec{z}_x, \vec{z}_y]}{|[\vec{z}_x, \vec{z}_y]|}$$

$$\begin{cases} z = z(x,y) \\ x = x \\ y = y \end{cases} \qquad (\vec{n}, \hat{Oz}) - \text{острый}$$

$\vec{z} = \{x, y, z\} \Rightarrow \vec{z}_x = \{1, 0, z_x\}$,

$\vec{z}_y = \{0, 1, z_y\}$

$$[\vec{z}_x, \vec{z}_y] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = \{-z_x, -z_y, 1\}$$

$$|[\vec{z}_x, \vec{z}_y]| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

$$\cos\gamma = \frac{-z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy$$

$\Rightarrow$ Левая часть равна:

$$\iint\limits_D (P_z \cdot (-z_y) - P_y \cdot 1)\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_D (P_z z_y + P_y)\,dx\,dy = (*)$$

Подставим: $\frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x,y)) =$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow (*) = -\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x,y))\,dx\,dy =$$

{ф-ла Грина}

$$= \oint\limits_\Gamma P(x, y, z(x,y))\,dx = (*)$$

$\in S$

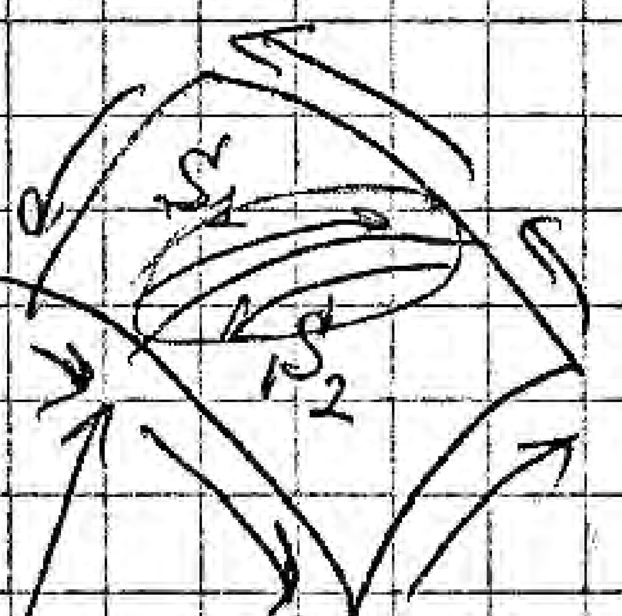
т.к. $(x,y) \in \Gamma \Rightarrow (x, y, z(x,y)) \in C$

$$(*) = \oint\limits_C P(x, y, z)\,dx, \text{ ч.т.д.}$$

Замечание 1. Перед усл. т. 3 мы предположили, что пов-ть S' однозначно проектируется на любую координатную плоскость некот. выбранной для S' ПДСК

Однако нетрудно показать, что ф-ла Стокса верна, если

$S' = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$, S_i удовл. усл. однозначного проектирования



$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\bar{n}, \mathrm{rot}\,\bar{a})\,d\sigma =$$

$$= \iint_{S_1} (\bar{n}, \mathrm{rot}\,\bar{a})\,d\sigma + \iint_{S_2} (\bar{n}, \mathrm{rot}\,\bar{a})\,d\sigma$$

компенсируются

$$= \oint_{\partial S_1} (\bar{a}, \bar{\tau})\,dl + \oint_{\partial S_2} (\bar{a}, \bar{\tau})\,dl =$$

$$= \oint_{S} (\bar{a}, \bar{\tau})\,dl$$

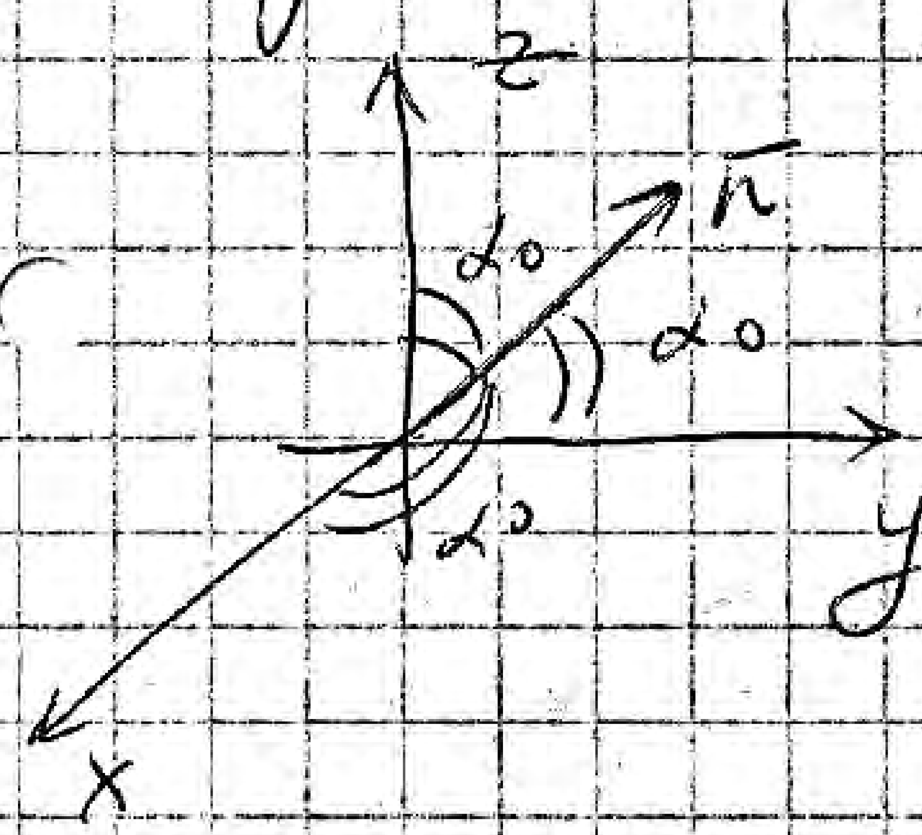
ЗПОДПБОТ

Несложно показать, что любую замкнутую полную огр. двустор. пов-ть S' без особых т. можно разбить на кон. число частей

$S' = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$, удовл. этому усл.

Действительно!

1) Т.к. $\bar{n} = \bar{n}(M)$ явл. непр., то $\forall$ точки поверхности $M_0 \in S'$ $\exists$ окр. в пределах кот. все векторы нормали $\bar{n}(M)$ образуют острый угол с $\bar{n}(M_0)$ ($\alpha < \pi/6$)



$\bar{n}(M_0)$ образует равные острые углы с каждой осью координат (α_0)

$$\bar{n}(M_0) = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\pi/6 \Rightarrow \alpha_0 > \pi/6$$

Т.е. в пределах окр-ти т. M_0 все $\bar{n}(M)$ образуют с $\bar{n}(M_0)$ угол $\alpha < \pi/6$

$\Rightarrow$ Вся указанная окр. удовл. указанному усл. – однозначно проектируется на пл-ть

2) Из пункта 1 следует, что каждая т. пов-ти M_0 обладает своей окрестностью размера $\delta(M_0)$, кот. однозначно проектируется на любую координатную пл-ть

Докажем, что $\exists\ \delta > 0$, что любая часть поверхности S' размера, меньшего δ, однозначно проектируется

на каждую координатную пл-ть

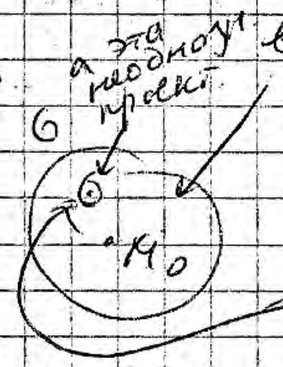
Действительно: пусть это не так $\Rightarrow$

$\forall \delta_n = \frac{1}{n}$ $\exists$ часть пов-ти S_n

$S_n \subset S$, кот. не удовл. указанному усл.

Пусть $M_n \in S_n$ и рассмотрим

посл-ть точек $\{M_n\} \subset S$ — полная замкн. огр. $\Rightarrow$ $\exists$ подпосл. $\{M_{k_n}\} \to M_0 \in S$



в пределах нек. окр. т. M_0 есть однозначное проектирование на любую коорд. пл-ть

противоречие

3) В силу "универсальности" числа $\delta \to 0$ для всех точек S $\Rightarrow$

$S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$, S_i — размера $< \delta$

§4 Некоторые приложения

1° Вычисление площадей и объёмов

а) Ф-ла Остроградского-Гаусса:

$P \equiv x$, $Q \equiv y$, $R \equiv z$

$$\iiint_V \operatorname{div} \bar{a}\, dV = \iiint_V (1+1+1)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= 3 \iiint_V dx\,dy\,dz = 3V(V) = 3|V|$$

объём

С др. стороны

$$\iiint_V \operatorname{div} \bar{a}\, dV = \iint_{\partial V} (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$$

$$\Rightarrow |V| = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$$

$\partial V \leftarrow$ пов-ть V

б) Ф-ла Грина $Q \equiv x$, $P \equiv -y$

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial S} P\,dx + Q\,dy$$

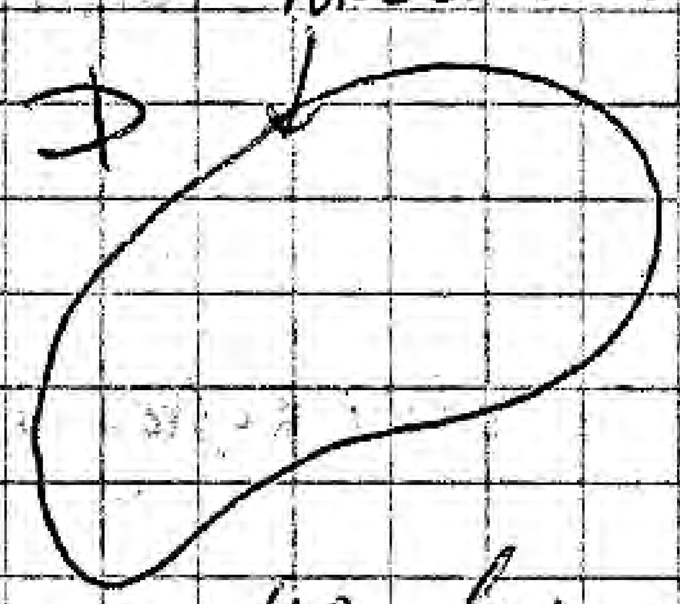
$$\Leftrightarrow 2 \iint_S dx\,dy = \oint_S x\,dx - y\,dy$$

$$\Leftrightarrow |S| = \frac{1}{2} \oint_S x\,dx - y\,dy$$

площадь пов-ти

2° Независимость криволинейного интеграла второго рода от "пути" интегрирования

Теор 4 Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — непр. в обл. D (плоскость)



Тогда следующие усл. эквив:

1) $\forall$ замкнутой кривой (без особых т., кусочно-гладкой, но, возможно, с самопересечениями):

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = 0 \quad (\Gamma \subset D)$$

2) $\forall$ точек A и $B \in D$ значение интеграла

$$\int_L P\,dx + Q\,dy,$$ где L соединяет точки A и B

(L явл. кусочно-гладкой кривой без особых т.) не зависит от выбора L, а может зависеть только от A и B

3) $\exists$ такая дифференцируемая ф-ция $u = u(x,y)$:

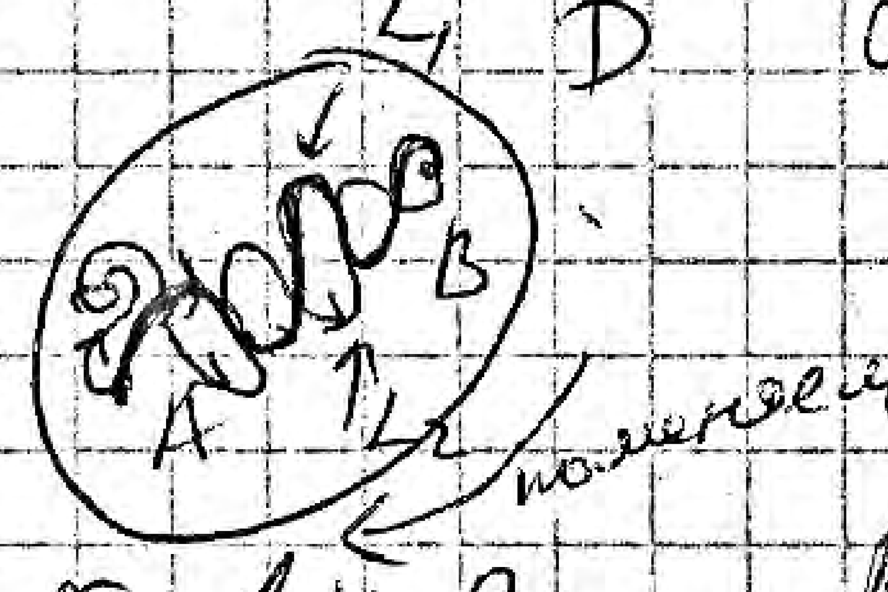
$$du = P\,dx + Q\,dy$$

[$P\,dx + Q\,dy$ — явл. полным диф-ом]

При этом $\int_L P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A)$

Д-во: 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1)

1 ⇒ 2 Расм $\forall$ т. $A, B \in D$ и соединим их двумя кривыми L_1 и L_2.

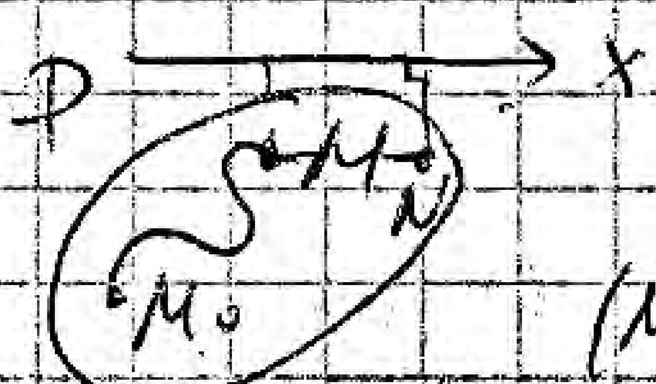


Тогда из этих L_1 и L_2 образуется замкнутый контур $\Gamma = L_1 \cup L_2$

т. A к B. В силу (1)

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = 0 \Rightarrow \int_{L_1} (P\,dx + Q\,dy) - \int_{L_2} (P\,dx + Q\,dy) = 0$$

2 ⇒ 3 Расм произв т. $M_0 \in D$ и фикс её. Тогда $\forall M \in D$ интеграл



$$\int_{(M_0M)} P\,dx + Q\,dy = f(M) \text{ — ф-ция т. } M, \text{ и только её}$$

$f(M) = u(M)$

(каким бы ни был контур, 2)

$MN \parallel Ox$

Докажем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = P(M)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = Q(M)$$

$$M(x,y) \Rightarrow N(x+h, y)$$

$$\Delta u = u(N) - u(M) = u(x+h, y) - u(x, y)$$

{с др. стороны}

$$= \int_{(M_0MN)} Pdx + Qdy - \int_{(M_0M)} Pdx + Qdy =$$

(часть первого интеграла)

$$= \int_{(MN)} Pdx + Qdy = \int_{(MN)} Pdx =$$

(Qdy → 0)

$[MN]$: $x \to x+h$, $y \equiv const$

{переобозначение}

$$= \int P(\xi, y)\, d\xi =$$

$$\begin{pmatrix} \xi = x+th \\ 0 \le t \le 1 \\ y = y \end{pmatrix}$$

{т. о среднем}

$$= \int P(x+th, y)\, h\, dt = hP(x+\theta h, y) = \Delta u, \quad 0 \le \theta \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta u}{h} = P(x+\theta h, y) = \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h}, \quad 0 \le \theta \le 1$$

При $h \to 0$ $P(x+\theta h, y) \to P(x,y)$

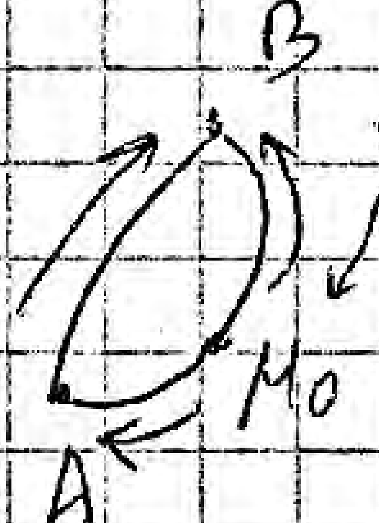
⇒ предел имеет и правая часть

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

Аналогично $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$

$$\Rightarrow Pdx + Qdy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \overset{def}{\equiv} du$$

Тогда $\int_{(AB)} Pdx + Qdy =$



$$u(A) = \int_{(M_0A)} Pdx + Qdy$$

$$u(B) = \int_{(M_0B)} Pdx + Qdy$$

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + \int_{(M_0B)} Pdx + Qdy - \int_{(M_0A)} (Pdx + Qdy) =$$

$$= 0 + u(A) - u(B), \text{ ч.т.д.}$$

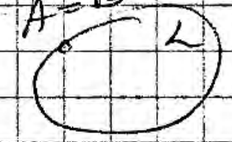
{по 2, соединяем точки контуром 0-ой длины}

Или же пойдём (так лучше) (т.к. не зависит, по 2)

$$\int_{(AB)} Pdx + Qy = \int_{(AM_0)} + \int_{(M_0B)} = u(B) - u(A)$$

3⇒1 Если контур L замкнут, то его конец совпадает с началом.

$A=B$



$\Rightarrow \oint_L P\,dx+Q\,dy = U(A)-U(A)=0$, что и требовалось.

Теорема 3 Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y) \in C^1[D]$. D – односвязна. Тогда любые из усл. 1–3 теор 4 эквив.:

4) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ в D

Д-во 1) ⇒ 2) ⇒ 3)

? 4) ?

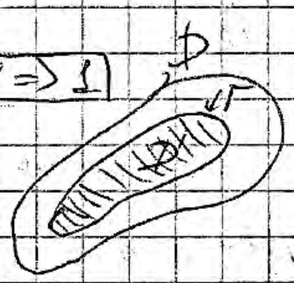
3⇒4 В силу усл. 3 $P=\frac{\partial U}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial U}{\partial y}$

U – дифф и непр (т.к. P и Q – непр.)

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$

(т.к. непр. $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ }, что и требовалось.

4⇒1



Γ – кусочно-гладкая кривая без особых т. и самопересечений, то тогда для D, ограниченной Γ

применима ф-ла Грина

$$\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$ по усл. (4)

$0''$